

2011年度
修士論文

液体金属熱対流シミュレーションとその可視化

神戸大学システム情報学研究科
計算科学専攻

古田敦哉

指導教員 陰山 聡 教授

審査教員 主査 白井 英之 教授

副査 陰山 聡 教授

副査 田中 成典 教授

2012年2月6日

Simulation and visualization of liquid metal convection

Furuta Atsuya

abstract

In order to investigate the effect of magnetic field and rotation to liquid metal convection, Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology (JAMSTEC) and Hokkaido University have collaboratively performed laboratory experiment for liquid gallium convection. Since the opacity of liquid gallium is high enough to prevent us from using optical measuring equipments, Ultrasonic Velocity Profiling (UVP) technique is employed for the experimental measurement. However, since the UVP can provide us only the information of one-dimensional distributions of fluid velocity, we have no means of studying three-dimensional spatial structures of magnetic and velocity fields which are essential for getting the convective properties.

In this work, we made a complementary numerical study, with using Earth Simulator 2, on liquid metal convection which can reproduce the laboratory experiment. In addition, for the multilateral and multidimensional analysis on the simulation data, we developed an original visualization software named “Gallium Field Visualizer (GFV)”. The GFV visualization enables us to study three-dimensional structures of the liquid metal convection, which can not be obtained in laboratory experiments.

As the numerical setting, we adopted a rectangular box with the same aspect ratio as the vessel used in the laboratory experiment and analyzed the thermal convection for the following three models: i) the model with no magnetic field and no rotation, ii) the model only with magnetic field, and iii) the model only with rotation. In the model i), we confirmed that the convective structure is gradually changed from the coherent one to the turbulent one with the increase of the Rayleigh number for the system. In the magnetized model ii), which has almost the same initial setting as the actual laboratory experiment, we found the formation of the convective roll structure which was discovered in the experiment.

Furthermore, the GFV visualization yielded additional findings, that is the helical flow along the convective roll and the concentration of magnetic fields by the convective converging flow. For the model iii) which precedes the laboratory experiment, the convective roll breaks up into the smaller scale columnar vortices aligned with the rotation axis with the increasing rotation velocity. When applying the particle tracer function installed in the GFV, we found the helicity reversal in the vortex column between upper and lower portions of the simulation domain.

The numerical simulation and three-dimensional visualization of the liquid gallium convection could provide us not only the information complementary for the laboratory experiment, but also the new findings which might serve as guides for future experiments. This work demonstrates that the collaborative research in simulation, 3D visualization and laboratory experiment should promote further understanding of the liquid gallium convection.

液体金属熱対流シミュレーションとその可視化

古田敦哉

要旨

液体金属熱対流に対する磁場や回転の効果を調べる目的で、液体ガリウムの熱対流実験を海洋研究開発機構と北海道大学が共同して行っている。実験では直方体容器内の熱対流を観察するが、液体ガリウムは不透明であり、光学的な計測法は利用できない。超音波を使った流速分布測定法も利用されているが、1次元の速度分布情報しか得ることができず、磁場や速度場などの空間構造を調べることができないという問題点を持つ。本研究では、この問題点を克服し、液体金属熱対流の本質に迫るために「地球シミュレータ」を使って実験を模擬したシミュレーションを行い、得られたデータを専用可視化ツール“GFV (Gallium Field Visualizer)”を使って多角的に解析した。実験と同様、直方体領域中での熱対流を計算モデルとして採用し、i) 磁場も回転も課さない場合、ii) 磁場のみを課す場合、iii) 回転のみを課す場合、における熱対流の物理を調べた。モデル i) では、レイリー数の増加に伴い対流がコヒーレントな状態から乱流状態へと遷移することを確認した。モデル ii) は実際の熱対流実験の条件に対応しており、実験で見いだされた対流ロール構造を数値的に再現した。さらにGFVの3次元可視化機能によって、実験では確認されていなかった対流ロールに沿った流線の螺旋構造と、収束流にともなう磁場の寄せ集め現象を発見した。実験に先行したモデル iii) では、高速回転下で回転軸に平行な軸を持つ渦柱が現れ、その半径が回転角速度に比例して小さくなることを確認した。また、GFVのパーティクルトレーサー機能を駆使して、渦柱の螺旋の巻き方が計算領域の上下で逆転していることを明らかにした。今回のシミュレーション可視化研究の結果、実際の熱対流実験を補完する情報だけでなく、今後の実験の指針となるような幾つかの結果を得た。シミュレーションと3次元可視化、そして熱対流実験を相補的に行うことで、今後液体金属熱対流の研究がさらに促進されると期待される。

目次

1	序論	1
2	液体金属熱対流実験と磁気流体シミュレーション	7
2.1	液体金属熱対流実験の概要	7
2.2	液体金属熱対流シミュレーションの計算モデル	10
3	可視化ソフト Gallium Field Visualizer (GFV) の概要	14
4	シミュレーション結果	17
4.1	磁場も回転も課さないモデル	17
4.2	水平磁場のみを課すモデル	19
4.2.1	計算領域のアスペクト比5のモデル	19
4.2.2	アスペクト比4の領域でのシミュレーション	28
4.3	回転のみを課したモデル	33
5	まとめ	38
	参考文献	40
	謝辞	42
A	渦識別値 Q_{3D} の導出	43
B	パーティクルトレーサー	44
B.1	補間法	44
B.2	4次精度ルンゲ=クッタ法	46

1 序論

地球を始めとする太陽系内惑星のほとんどが固有の磁場を有している。その磁場構造には多様性があり、惑星の存在する位置や内部構造・内部組成の違いなどが多様性の直接的な要因だと考えられている。例えば、土星や木星といった巨大惑星は地球と同様に双極成分が卓越した磁場構造を持つことが知られている。一方で、同じく巨大惑星に分類される天王星や海王星は（ただし氷惑星）、無人探査機ボイジャーによる観測の結果、非軸対称で非双極な磁場構造を持つことが分かってきた。また、地球型惑星の水星や火星、木星の衛星であるガニメデや月にも磁場が存在することが知られている。惑星磁場の起源を理解することは、惑星形成メカニズムや惑星の内部構造の全容解明へ向けての重要なマイルストーンとして位置づけられている。

惑星磁場は、惑星内部の複雑な磁気流体（MHD: Magneto-Hydro Dynamic）ダイナモ過程を通して作られると考えられている [1]。しかし、惑星の内部構造および組成には極めて大きな不定性が存在する上に、ダイナモ機構を調べる数値実験も現実とはかけ離れたパラメータ領域で行われているため、惑星個々のダイナモ機構や惑星磁場の多様性の起源についてはコンセンサスが得られていないのが現状である。

惑星磁場とその生成機構のプロトタイプモデルとなるのが、地球の地磁気とそのダイナモ理論である。良く知られているように地球は双極磁場の磁気圏を持ち、人類はその多大な恩恵を受けて生活している。例えば、太陽から降り注ぐ高エネルギー粒子や銀河宇宙線による被爆の危険から人類を守っているのが、磁気圏によるシールドであることは周知の事実であろう。

実は、地球では過去に何度もこの地磁気の大逆転という現象が起きている。地磁気の大逆転時期は火山岩などがもつ磁化を測定することで知ることができ（古地磁気学）、詳しい古地磁気研究から大逆転の非周期性や地磁気大逆転が最近では78万年前に起こったことなどが明らかになってきている。地球の地磁気大逆転の歴史を表にしたのがFig. 1である [2]。地質時代の第四期（258万8000年前から現代まで）を、地球の大逆転モーメントの極性で色分けしており、茶色は現代の地球と同じ極性、水色は反対の極性に対応している。大逆転に周期性は無く、継続時間も一定ではないことが分かる。

地球の地磁気もその内部のダイナモ過程に起源を見いだすことができる。Fig. 2に地球の大逆転磁場構造、および地球の内部構造を模式的に示す。地球の内部は2つの層に分かれており、外側はマントル層、内側はコア層と呼ばれている。マントル層の主成分は岩石で、コア層の構成要素は鉄である。コア層はその鉄の状態の違いから、さらに内核と外核と呼ばれる二つの層に分けられる。鉄は内核では固体の状態が存在するが、外核では液体として振る舞う。液体鉄は電気伝導性が

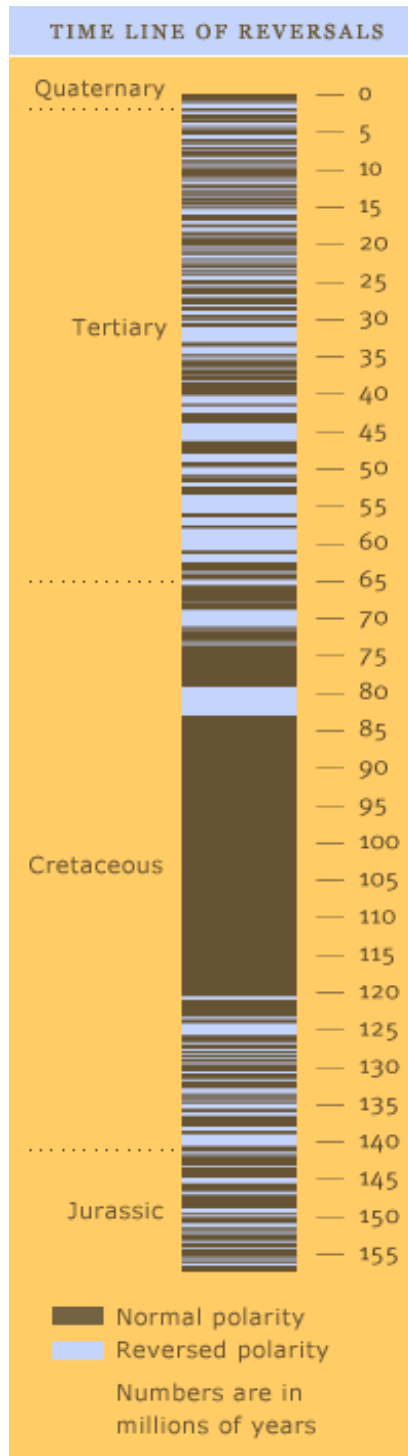


Fig. 1: Time line of reversal of geomagnetic field. The aqua color shows duration of reversed polarity.

あり、地球の自転由来のコリオリ力を受けた液体鉄の熱対流運動によって巨視的な電流が生じることで、磁場が生成・維持されると考えられている。これが地球のダイナモ（発電機）過程である。

ダイナモ過程はMHD方程式によって記述される（第2章参照）。MHD方程式は8変数の連立非線形偏微分方程式系であり、紙と鉛筆で解析的に解を得ることは現状では不可能である。そのためスーパーコンピュータを使った大規模シミュレーションが現在ダイナモの理論的研究の主流になっている。これまで陰山 [3, 4, 5] や Glatzmaier [6] らが、世界に先駆けて地磁気の逆転をコンピュータ上で再現することに成功しているが、そのメカニズムについては未だに不明な点も残されている。一方、液体金属の熱対流に対して回転や磁場が及ぼす影響を実験的に調べる試みも近年行われるようになってきた。

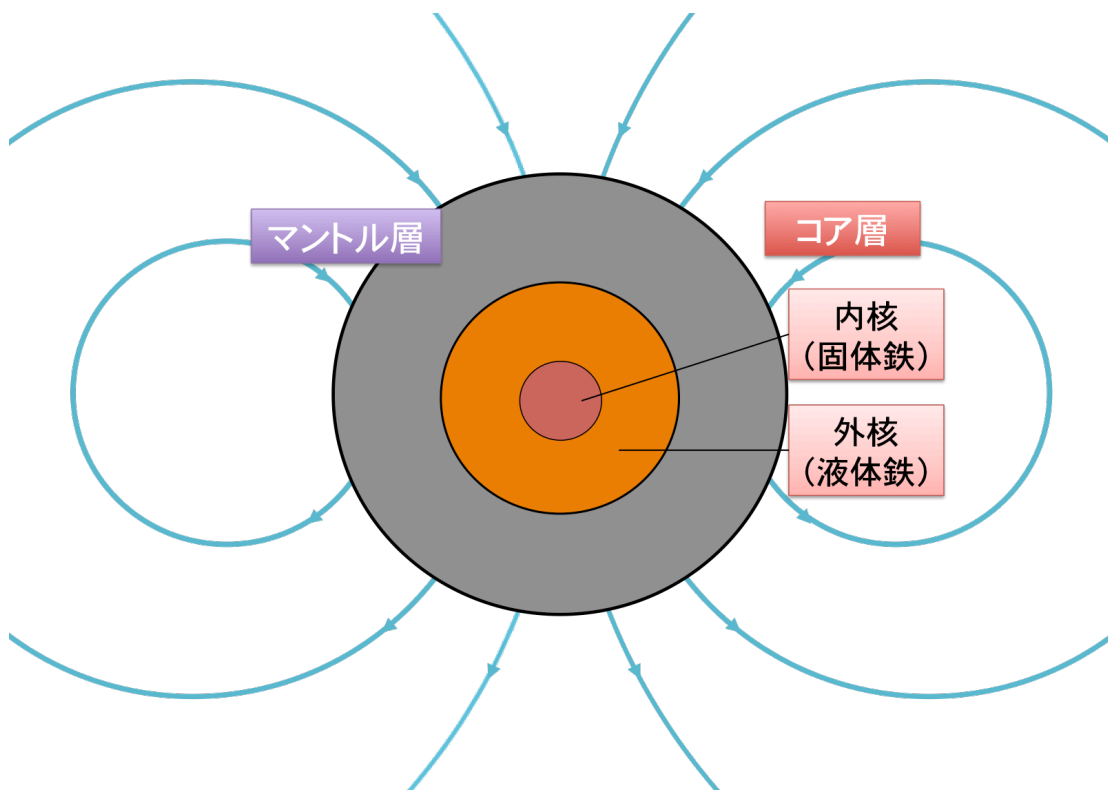


Fig. 2: The structure of the geomagnetic dipole field and inside of the earth: the mantle and the core. The outer core is composed of liquid iron and the inner core is composed of solid iron.

熱対流の最も代表的な例としてレイリー・ベナール対流があげられる [7]。ここでは水平な流体層の下面を加熱して、上下面に温度差を与えることを考える。温

度差が小さい時は熱伝導によって熱は下面から上面へと運ばれ、流体は静止したままである。温度差がある臨界値を超えると、対流による熱輸送のほうが熱伝導よりも効率的になるため、流体中に対流が発生する。

対流を駆動するのに必要な速度勾配は、以下に定義されるレイリー数 Ra によって特徴づけられる [8, 9]。

$$Ra = \frac{(g/T_0)\beta d^4}{(\kappa/\rho C_p)(\nu/\rho)} \quad (1)$$

ここで

$$\beta = \beta_0 - \frac{g}{C_p} \quad (2)$$

g は重力加速度、 T_0 は上面の温度、 d は容器の深さ、 κ は熱拡散率、 ρ は密度、 C_p は定圧比熱、 ν は粘性係数、 β_0 は熱勾配である。このレイリー数 Ra が臨界値を超えると、流体中に対流が発生する。この臨界値を臨界レイリー数 Ra_c と呼ぶ。対流は、下面で温められた流体をより温度の低い上面へ運んで冷やし、逆に温度の低い上面の流体は下面へと運んで温める。その結果、対流は円を描くように鉛直面内を循環し、熱を運ぶ。この運動により細胞状の様子が現れることがあり、このような模様を生じる対流をレイリー・ベナール対流と呼ぶ。Bénard は、厚さ約 1mm の静止した、粘性の高い鯨油層を用いて実験を行い、正六角柱の対流セルが出現することを見出した [10] (Fig. 3)。対流セルのパターンは容器の形状 (円柱や直方体など) やアスペクト比 (高さに対する底面の辺の長さの比)、またその流体の粘性によっても変化する。

流体の運動量の拡散である粘性は、プラントル数

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (3)$$

を使って、熱拡散との比で表現される。例えば水のような液体では、プラントル数 Pr は 2 から 10 程度である。油のような高粘度の液体になると 50 から 1000 程度と、粘度に応じて大きな値になる。液体金属は水銀が 0.02、ガリウムが 0.025 と水や油に比べて極めて小さな値をとる。そのため、液体金属は水とは異なる対流のパターンを示すことが期待される。

液体金属の最大の特徴は電気伝導性を持つ点である。電気伝導性があることで流体の運動が磁場に影響を与え、磁場の変化がローレンツ力を介し流体の運動に作用する。このような流体は MHD 流体 (磁気流体) と呼ばれ、その進化は磁気流体方程式に従う (2.2 節参照)。電気伝導の効果は運動量と電流の拡散の比である磁気プラントル数

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} \quad (4)$$

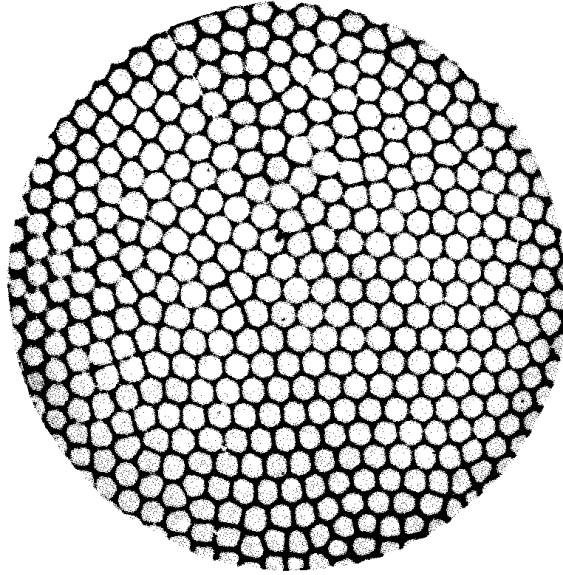


Fig. 3: Bénard cells in spermaceti. A reproduction of one of Bénard's original photographs. (Citation from [11])

によって特徴づけられる。ここで η は磁気拡散率を表す。例えば、液体ガリウムの磁気プラントル数は $Pm = 1.5 \times 10^{-6}$ であり、運動量に比べて遥かに効率的に電流が拡散する。

熱対流に対する磁場の影響はチャンドラセカル数

$$Q = \frac{B^2 d^2}{\rho \nu \eta} \quad (5)$$

[11] によって特徴づけられる。また、回転の影響はエクマン数

$$Ek = \frac{\nu}{\Omega d^2} \quad (6)$$

によって特徴づけられる。ここで、 Ω は回転角速度である。エクマン数 Ek は Ω が大きくなるほど小さな値をとる。

水や油など身近な液体を使った対流の研究と比べて、液体金属熱対流の研究はほとんど行われていない。水のような透明な液体に対して用いられてきた従来の光学的な測定法が、光学的に不透明な液体金属には使用できないことが主な原因である。液体金属熱対流の実験の例としては、例えば円柱容器を用いた水銀の対流実験 [12] や直方体容器を用いたガリウムの熱対流実験 [13] などがある。これら

の実験では、対流に対する磁場の影響が調べられており、磁場によって対流が抑制されることが明らかにされている。

液体金属熱対流のMHDシミュレーション研究は更に数が少なく、類似した先行研究例としては、低プラントル数流体の回転熱対流シミュレーションがある [14]。この研究では、液体金属と同等のプラントル数 $Pr = 0.1$ を持つ流体のレイリー・ベナール対流をシミュレーションで調べている。回転が対流に及ぼす影響に注目しており、最大でエクマン数 $Ek = 2.0 \times 10^{-5}$ に相当する回転が課されている。また、液体金属より一桁大きいプラントル数 $Pr = 1.0$ を持つ流体のシミュレーションも行われており、これらの研究では、高速回転の影響下で、回転軸に沿った渦の柱が現れることを明らかにしている [15]。また、渦のヘリシティが渦柱の上下で異なる符号を持つことや、回転の効果が大きくなるにつれて柱の半径が小さくなることなどが、従来の研究で得られた成果である。

現在、海洋研究開発機構は、北海道大学との共同研究で、液体金属のレイリー・ベナール対流に対する回転や磁場の影響を実験的に調べている [16, 17, 18, 19]。本研究では、この液体金属熱対流実験を模した磁気流体シミュレーションを行い、磁場や回転が液体ガリウム熱対流に及ぼす効果を詳しく調べた。計算には九州大学の井上氏 [20] が開発したカーテシアン座標系の3次元圧縮性MHDシミュレーションコードを改良して用い、海洋研究開発機構に設置されている地球シミュレータ [21] を使って計算を実行した。また、本研究の特色の一つは、シミュレーションによって得られたデータを3次元的かつ対話的に可視化・解析するために、新たに専用ソフトウェアを開発したことである。開発した可視化ツールを使って、実験では得ることのできない流れ場の3次元構造を抽出し、多角的に解析した。

2 液体金属熱対流実験と磁気流体シミュレーション

2.1 液体金属熱対流実験の概要

Fig. 4に液体金属熱対流実験で使われている容器の写真を、Fig. 5にその実験概要を模式的に示す。この実験で採用している液体金属はプラントル数0.025のガリウムである。ガリウムは、融点が 30°C と外気温に近く、液体の状態を保つことが比較的容易であり、実験を安全に進めることができる。

実験容器は幅、奥行き、高さがそれぞれ200mm、200mm、40mmで、アスペクト比5の直方体である。側面には断熱性の高いテフロンが用いられている。上下の面は熱伝導率の高い銅板で覆われ、循環水によって上面（冷却面）は 32°C 、下面（加熱面）はそれよりも高い温度に保たれている。この上下面の温度差により、液体金属中で熱対流が発生する。実験では下面の温度を 32°C から 60°C 程度まで変化させ、熱対流の応答を調べる。下面の温度が高いほど対流は激しくなり、その強度の指標であるレイリー数 Ra も増大する。水平方向に一様磁場を課す際には、ヘルムホルツコイルを実験容器の両端に設置する。磁場の強度は0から18mTの間で調整され、これはローレンツ力と粘性力の比であるチャンドラセカル数 Q に直すとおよそ0から 10^3 に相当する。

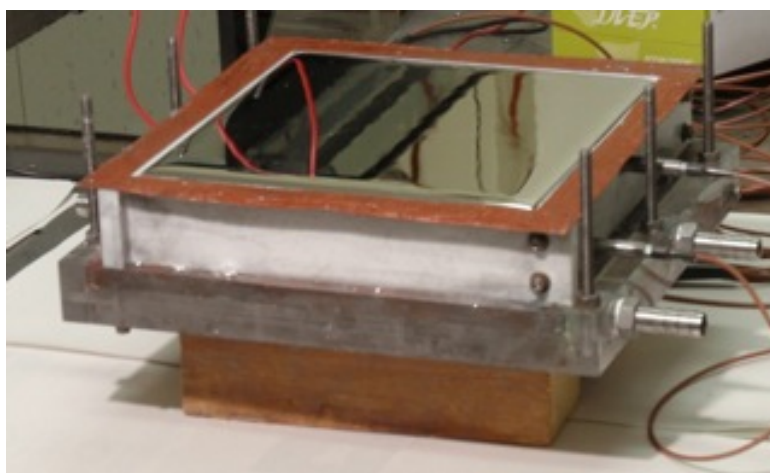


Fig. 4: Liquid gallium contained in a convection vessel.

対流の構造を計測するために、液体金属熱対流実験では超音波流速分布測定法 (Ultrasonic Velocity Profiler, UVP)[22]を採用している。液体金属は不透明であるために、水のような透明な流体の実験で用いられる光学的な速度場の測定方法は使用することが出来ない。UVPは、超音波のビームとそのドップラー効果を利用することで、速度場の分布の測定を可能にする。実験での流れの速度の水平

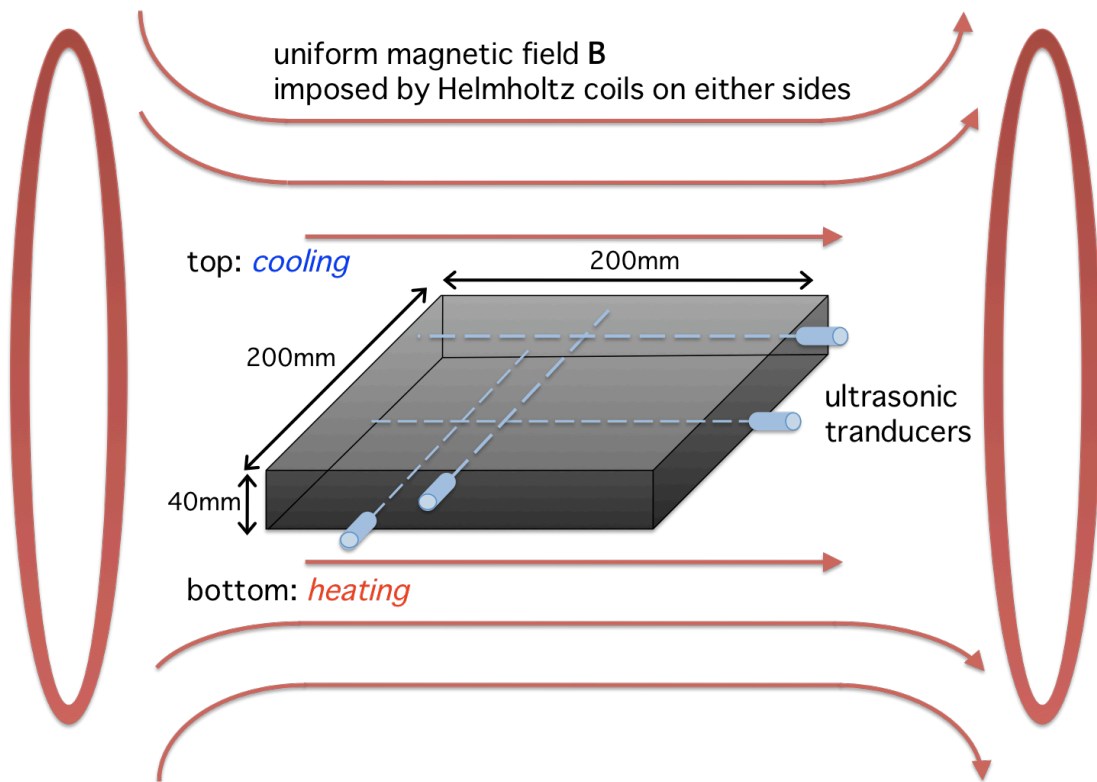


Fig. 5: Experimental arrangement performed by Yanagisawa et al.. Liquid gallium is filled in the square vessel whose aspect ratio is 5:5:1. The inside measurements are 200 mm long, 200 mm wide and 40 mm height. Four transducers attached at sidewalls measure the velocity profile on the ultrasonic beam lines. Helmholtz coils impose uniform magnetic field on the vessel.

方向の値がおおよそ $\pm 10\text{mm/s}$ であるのに対して、UVP の分解能は 0.34mm/s と十分な精度がある。超音波のビームは、側壁に空けた穴に取り付けられたトランスデューサから照射される (Fig. 6)。ドップラー効果を利用し照射線上の速度場の分布が得られるが、照射本数が多すぎると超音波同士の干渉が起こるため、速度場の全体を細かく解像することは難しい。また、測定できるのはビーム上の 1 次元的な分布に限られるため、3 次元数値シミュレーションやその可視化で相補的な情報を引き出すことは、熱対流実験を進める上で極めて有用である。UVP による液体ガリウム熱対流の測定についての詳細は文献 [23] を参考にされたい。

柳澤らが 2011 年に行った実験では、課した水平磁場に平行な軸を持つ「流れのロール構造」の形成が報告されている。実験で観測されたロールの数は 4 本であり、その流れの向きは不規則な時間間隔で逆転する。また、レイリー数 Ra が大きくなると流れは乱流状態に移行し、ロール構造が消失することも報告されている [18]。

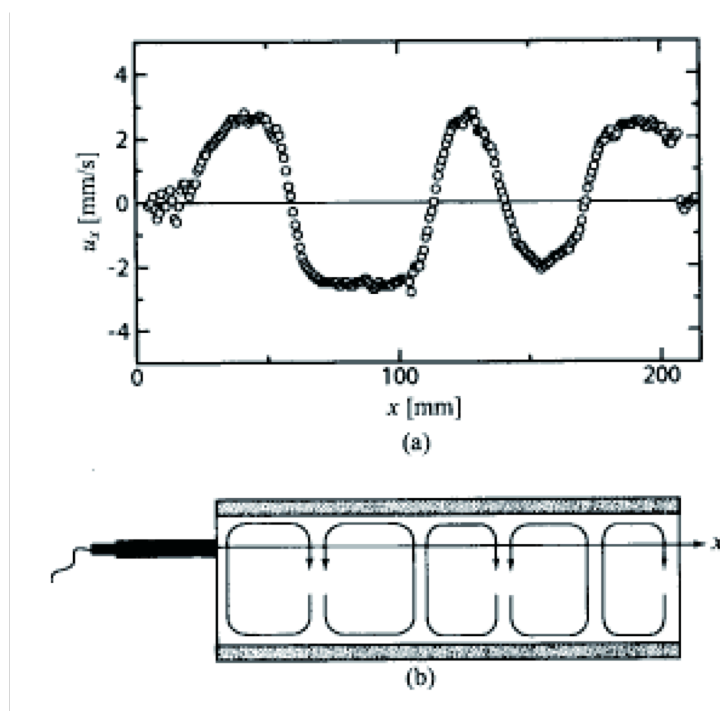


Fig. 6: (a) Observed velocity profile by UVP. (b) Schematic view of UVP measurement.

2.2 液体金属熱対流シミュレーションの計算モデル

本研究で採用した計算モデルを Fig. 7 に示す。実験で使用している容器の比率に合わせ、幅、奥行き、高さの比率を 5:5:1 (アスペクト比 5) としている。下面の頂点の一つを原点とし、幅方向に x 軸、奥行き方向に y 軸、高さ方向に z 軸をとったカーテシアン座標系で計算を行う。水平磁場は x 軸正の方向に課し、回転軸は z 軸正の向きにとる。各境界面には滑り無し条件を課す。側面には断熱境界条件を課し、上下面の温度は一定に保つ。上面の温度を 1 に規格化し、下面の温度は 1 より高く設定した。また、磁場のベクトルポテンシャルは全ての境界上で、境界面に対して垂直な磁場成分しか持たないように境界条件を課した。

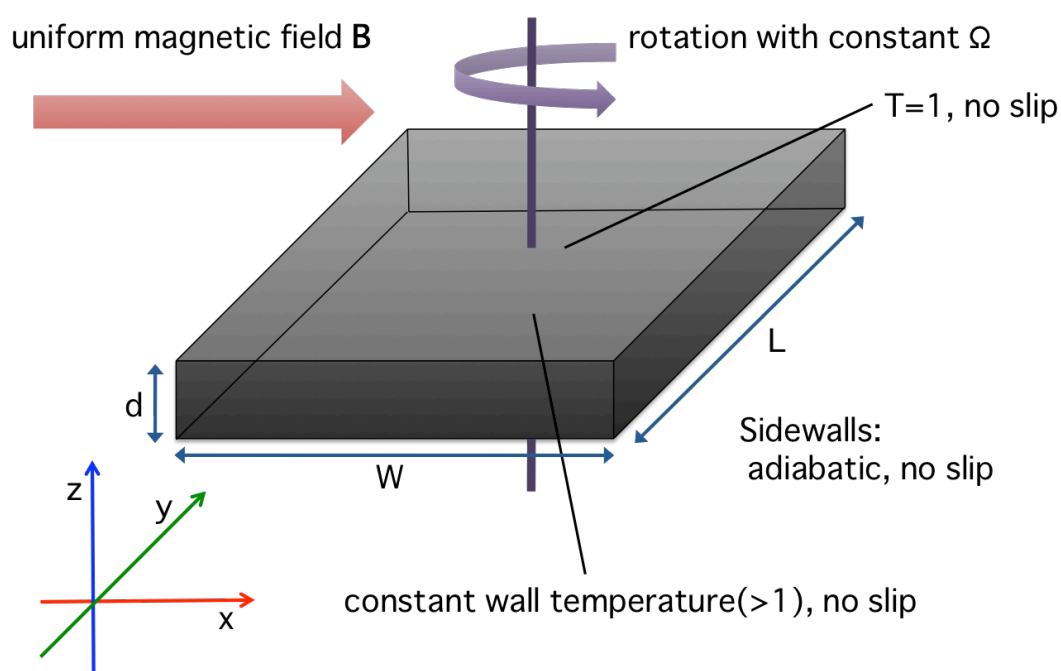


Fig. 7: Numerical setting which models the vessel adopted in the complementary experiment. The simulation domain is rectangular box whose aspect ratio is 5:5:1. Sidewalls are maintained to be adiabatic and the boundary condition is no slip. The bottom plate is controlled to be hotter than the top plate whose temperature is fixed to be unity. We can impose an uniform magnetic field or a rotation with constant angular velocity Ω about the z -axis additionally.

支配方程式は圧縮性 MHD 方程式で、以下に示す連続方程式、回転座標系での運動方程式、熱方程式、誘導方程式から成る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{f} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nu \mathbf{f}) - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} + 2\mathbf{f} \times \Omega + \nu(\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})) \quad (8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} + (\gamma - 1)\kappa \nabla^2 T + (\gamma - 1)\eta \mathbf{j}^2 + (\gamma - 1)\Phi \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} \quad (10)$$

ここで、

$$\begin{aligned} p &= \rho T \\ \mathbf{f} &= \rho \mathbf{v} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j} \\ \Phi &= 2\nu(e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})^2) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \end{aligned}$$

である。また、遠心力項は無視していることに注意されたい。 ρ は質量密度、 p は圧力、 \mathbf{f} は質量流量、 \mathbf{v} は速度、 \mathbf{A} は磁場のベクトルポテンシャル、 \mathbf{B} は磁場、 \mathbf{j} は電流密度、 \mathbf{E} は電場、 γ は比熱比、 ν は粘性率、 κ は熱拡散率、 η は電気抵抗、 \mathbf{g} は重力加速度を表す。基本変数は質量密度 ρ 、質量流量 \mathbf{f} 、磁場のベクトルポテンシャル \mathbf{A} 、圧力 p である。実際の計算では系の典型的な量で規格化された MHD 方程式を解いている。

本研究で調べた計算モデルは、複数の無次元量で特徴づけられている：レイリー数 Ra 、チャンドラセカール数 Q 、エクマン数 Ek 、プラントル数 Pr 、磁気プラントル数 Pm である。本研究ではレイリー数の定義式(1)中の、上下面間の温度勾配 β_0 以外のパラメータは固定されている。よって、上下面の温度差に比例して、レイリー数は増大する。磁場を課した全てのモデルで、磁場強度の指標であるチャンドラセカール数 Q は 10^5 に固定されている。実験では $Q = 10^3$ の磁場が課されており、実験より 2 桁ほど強い磁場を想定したシミュレーションが行われていることには注意が必要である。エクマン数 Ek は回転の速さの指標であり、回転角速度 $\Omega = 0$ のときは $Ek = \infty$ になる。回転を加えるための実験装置は開発中であり、現状では実験をシミュレーションが先行している。

プラントル数 Pr は流体の熱伝導性の指標、磁気プラントル数 Pm は電気伝導性の指標であり、それぞれ流体固有の値を持つ。本研究では、実験で使われる液体ガリウムと同じプラントル数 $Pr = 0.025$ を用いる。一方、磁気プラントル数は実際の値 $Pm = 1.5 \times 10^{-6}$ より5桁近く大きな値 $Pm = 0.1$ に設定する。これは、熱伝導性は同じだが、現実の液体ガリウムよりも小さな電気抵抗を持つ流体を想定することを意味している。現実的な電気抵抗を用いると、シミュレーションの時間刻み制約条件（クーラン条件）が厳しくなり、計算に要する時間が著しく増大するためである。

シミュレーションでは任意のステップにおける全ての格子点での速度と磁場のベクトル成分、及び温度、圧力がスナップショットデータとして出力される。また、平均的な系の振る舞いを調べるために、100ステップ毎に対流の運動エネルギーの空間平均量が出力される。運動エネルギーの空間平均は、

$$\left\langle \frac{1}{2} \rho v^2 \right\rangle = \int \int \int \frac{1}{2} \rho v^2 dx dy dz / V \quad (11)$$

で定義される。ここで、 V は計算領域の体積である。今回行った熱対流シミュレーションでは、初期条件として計算モデルの下面の温度を設定する。力学的に平衡な初期分布に対して、ランダムな摂動を加えることで熱対流が発展する。この時、初期にゼロだった運動エネルギーは時間とともに増大し、対流が準定常に到達すると飽和値に落ち着く。

今回調べた計算モデルのほとんどは、準定常状態に達した後、顕著な対流構造の時間変化を示さない。しかし、一部のモデルで、準定常な対流構造が不安定になり、異なる対流構造に遷移するものが存在する。Malkus (1954) が行った水を用いた対流層の実験では、対流構造の遷移とレイリー数の相関が確認されている [24]。対流構造の変化が生じるレイリー数は、遷移レイリー数 (transition Rayleigh number) と呼ばれている [25]。本研究において遷移レイリー数は、レイリー数の関数としてプロットした運動エネルギーの傾きの変化によって確認できた。

これまで多くの研究で、熱対流の強さを測定するための1つの指標としてヌッセルト数 Nu が導入されてきた [26]。ヌッセルト数 Nu は以下のように定義される。

$$Nu = \frac{d}{\kappa \Delta T} \bar{q} \quad (12)$$

ここで、 ΔT は上下面の温度差、 \bar{q} は上面と下面の熱流束の平均値で

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{bottom} + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{top} \right) \quad (13)$$

と表される。ヌッセルト数 Nu は対流によって輸送される熱量と、流体が静止している時に熱伝導によって移動する熱量の比を表す。対流が生じていないとき、

$Nu = 1$ であり、対流熱輸送が効率的になるほど Nu は大きくなる。以下では、系のレイリー数に対するヌッセルト数の空間平均値の依存性を、運動エネルギーの依存性ととも調べる。

流れ場を理解する上で重要な空間構造の一つが渦である。通常、渦の強さの指標として渦度

$$\omega = \nabla \times \boldsymbol{v} \quad (14)$$

や渦度の二乗にあたるエンストロフィーを用いる。しかし、これらの値はシアークラス（せん断流れ）に対しても大きな値を持つため、熱対流シミュレーションでは空間的に局在化した「渦」と壁面境界付近に形成されるシアークラスを分離することが難しかった。そこで、本研究では渦の強さの指標として、 Q_{3D} 値を用いた判別法を導入した。この判別法では条件

$$Q_{3D} \equiv \frac{1}{2}(\|\Omega\|^2 - \|S\|^2) > 0 \quad (15)$$

を満たす空間領域を渦として定義する [27]。ここで、 Ω は歪み速度テンソル、 S は渦度テンソルである。 $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}(AA^T)}$ はテンソル A のユークリッドノルムである。 Q_{3D} 値を用いた判別法を導入することで、境界付近のシアークラスを分離することが容易となり、より正確に渦のある場所を視認できるようになった。 Q_{3D} 値の詳しい導出については付録 A に記した。

エンストロフィーと Q_{3D} による渦の検出結果の比較を Fig. 8 に示す。(a) はエンストロフィー、(b) は Q_{3D} の等値面である。(a) では壁面に近い場所でのシアークラスが、より高いエンストロフィーを与えてしまっている。その結果、肝心の領域内部の渦の値が均されてしまい、渦の空間構造が認識できない。一方、(b) ではシアークラスの影響は無く、直接渦の構造を抜き取ることに成功している。

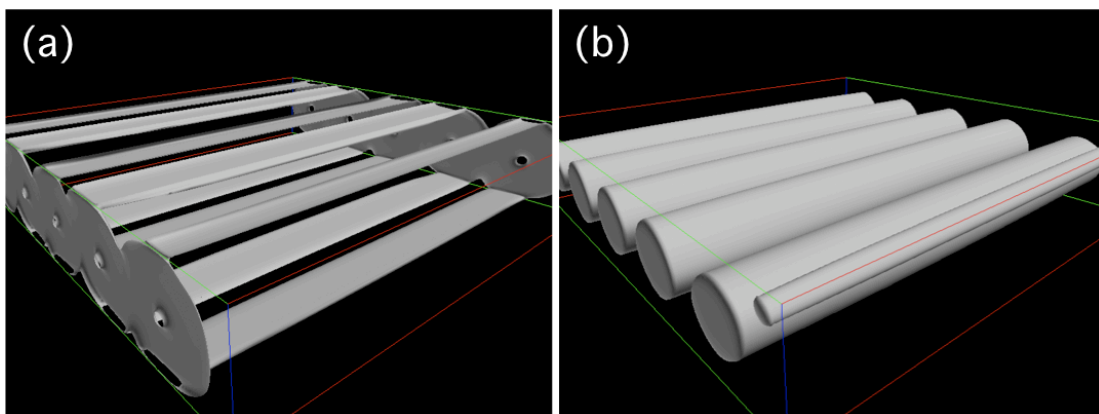


Fig. 8: Visualization of isosurfaces of (a) enstrophy and (b) Q_{3D} . Isosurfaces of enstrophy provide the higher value to the shear flow driven near the wall. In contrast, isosurfaces of Q_{3D} accurately capture the structure of vortices developed inside the domain.

3 可視化ソフト Gallium Field Visualizer (GFV) の概要

本研究では MHD 流体のベクトル場（速度場と磁場）とスカラー場（圧力、密度）を、3次元的に可視化するための専用ソフト Gallium Field Visualizer (GFV) を開発した。プログラミング言語は C 言語を採用し、3次元グラフィックスの作成には OpenGL を用いた。GFV では、シミュレーションで得られたデータをポストプロセスで処理し、3次元モデルを作成する。GFV の特徴の一つが、インタラクティブな操作が可能なことであり、これによりデータ解析を効率的かつ直感的に行うことができる。

シミュレーションでは空間を格子状に分割し、各格子点における速度、磁場、圧力、温度、 Q_{3D} を計算している。速度と磁場はベクトル量であり、格子点毎に x、y、z 方向の 3 成分を持つ。計算結果は、各ベクトル成分やスカラー値毎にバイナリファイルに出力される。GFV ではこれらのファイルを読み込み、各格子点上の数値データを可視化する。

GFV を実行すると Fig. 9 に示されるような、直方体の領域（バウンディングボックス）が表示される。直方体の赤、緑、青の各線はそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸の境界を表す。視点はマウス操作によってインタラクティブに変更できる。マウスのミドルボタンを押すとメニューが呼び出される。メニューから機能を選ぶことで、それに応じた可視化機能が実行できる。GFV は複数の可視化機能を同時に使用できるため、組み合わせを変えることで計算データの多面的な解析が可能で

ある。

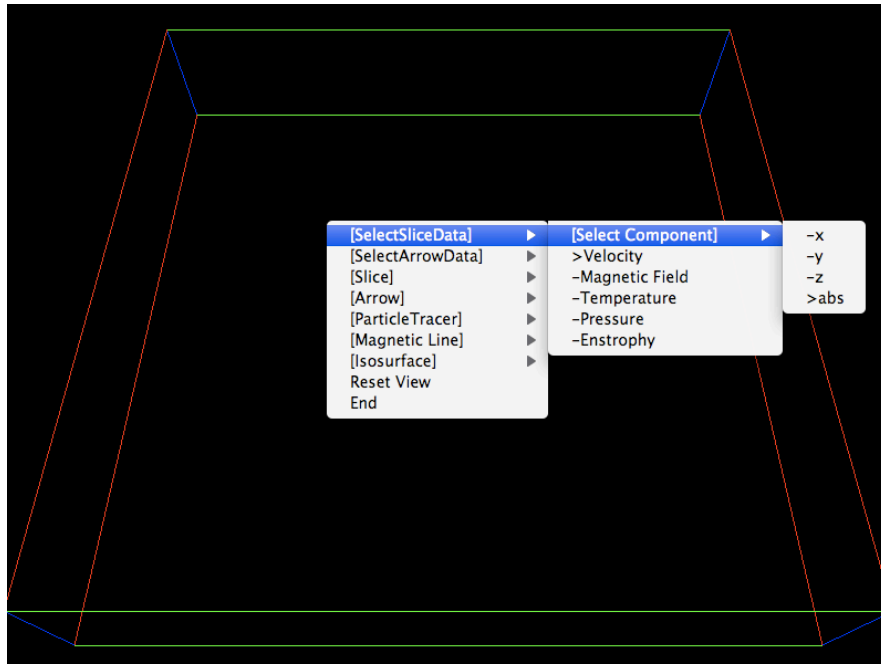


Fig. 9: The boundingbox and menu in GFV. The boundingbox depicts boundaries of simulation domain. Red, green and blue lines describe x-, y-, and z-directions respectively. The menu is called by middle button of a mouse and calls functions of GFV.

GFVはスカラー場とベクトル場両方の可視化機能を備えている。スカラーデータは断面図表示の機能によって可視化できる。この機能ではバウンディングボックス内の任意の x-y、y-z、z-x 平面を選び、その面上でのスカラー場の強度分布を見ることができる。スナップショットデータを読み込み、全ての格子点でのスカラー値の情報から最大値と最小値を求め、最大値は赤で、最小値は青で表示する。また、ある値の3次元的な分布を知るために有効な、等値面表示機能も備えている。等値面とは、等高線を3次元に拡張したようなもので、同じ値を持つ点を面で繋いだものである。アルゴリズムにはマーチングキューブ法 [28] を用いて、データからポリゴンを生成する。

一方、ベクトル場の可視化のために、ベクトル量を2次元及び3次元の矢印で表示する機能とパーティクルトレーサーの機能を実装している。矢印機能では、各格子点におけるベクトルの向きと大きさを矢印の向きと大きさで表す。パーティクルトレーサーは、速度場や磁場など、ベクトル場一般に対して適用できる可視化手法である。バウンディングボックス内に粒子の初期位置を設定すると、ベク

トル場に沿って動くトレーサー粒子の時間積分が開始され、表示される粒子の位置が逐次更新される。時間とともに粒子が動くことで、アニメーションとして粒子の軌跡を視認することができる。また、その軌跡はチューブとして描かれ、どのような軌道でトレーサー粒子が動いたかを確認できるようになっている。時間積分には4次精度のルンゲ=クッタ法を採用している。パーティクルトレーサーで使われている各種計算手法については、付録Bにまとめる。任意の場所にトレーサー粒子を置いたり、複数の粒子を同時に追跡できる点もGFVの特徴の一つである。

Fig. 10に、2種類のモデルでのGFVの実用例を示す。(a)では流れ場の断面図表示、矢印表示、パーティクルトレーサーを同時に行なっている。鉛直方向に軸を持つ渦があり、矢印が渦の向きに沿って並んでいる。また、パーティクルトレーサーが矢印の方向に沿って進んでいることも分かる。(b)では流れ場の断面図表示、矢印表示、パーティクルトレーサーに加えて Q_{3D} の等値面表示を同時に行なっている。この可視化では渦領域の空間分布が等値面表示によって3次元的に視認できる。パーティクルトレーサーの軌跡は等値面に沿って渦を描いており、 Q_{3D} が正確に渦の構造を抜き出していることが確認できる。さらに3次元の矢印を同時に表示することで、渦の向きを知ることができる。それぞれの機能を単独で用いるだけでは、このような3次元的な構造を直感的に視認することは難しく、可視化機能の組み合わせの有効性が分かる。以下では、開発したGFVの可視化機能を熱対流研究に応用して、多角的なデータ解析を行った。

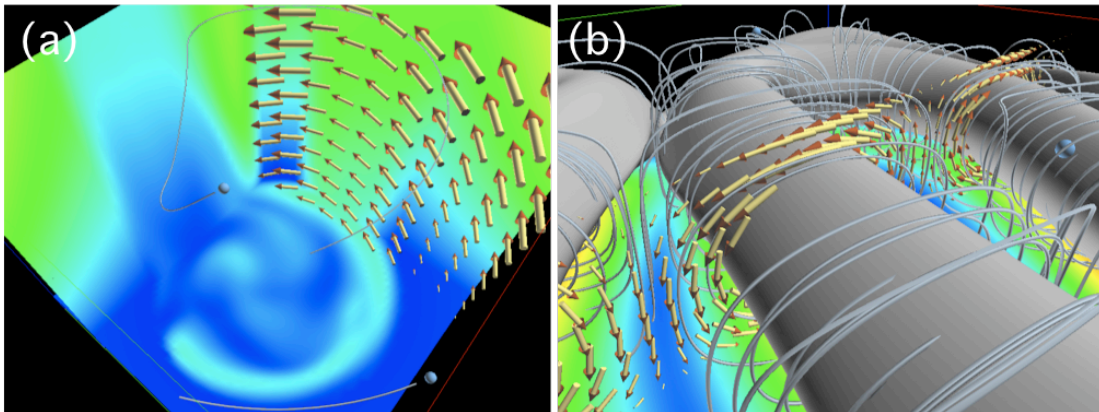


Fig. 10: Examples of visualization by GFV. The color of slices describes the strength of velocity and arrows follow its direction. Particle tracer moves along the streamline and captures the structure of flow. The isosurfaces of (b) shows Q_{3D} for extracting the vortices from the convective flow.

4 シミュレーション結果

今回調べた液体ガリウムの熱対流シミュレーションモデルは、i) 磁場も回転も課さないモデル、ii) 水平磁場のみを課すモデル、iii) 回転のみを課すモデルの3つである。プラントル数 Pr 、磁気プラントル数 Pm は全てのモデルで共通である。磁場を課すときはチャンドラセカル数 Q 、回転を課すときはエクマン数 Ek を変化させることで、それらの強さを設定する。i) から iii) の各モデルに対してレイリー数 Ra を変動させ、熱対流の振る舞いの変化を調べた。以下のほとんどのモデルで計算領域のアスペクト比は5に固定している。

4.1 磁場も回転も課さないモデル

まず基準となるモデルとして、磁場も回転も課さない状態での熱対流を調べた。このモデルの自由パラメータは上下面間の温度勾配 β_0 、すなわちレイリー数 Ra のみである。計算に用いた格子数は $251 \times 251 \times 151$ で、レイリー数を 5.0×10^3 から 5.5×10^4 の範囲で変化させ、熱対流の振る舞いを解析、可視化した。

Fig. 11 に熱対流の (a) 運動エネルギー ($\frac{1}{2}\rho v^2$) と (b) ヌッセルト数 Nu のレイリー数依存性を示す。各レイリー数での値は一定間隔の時間・空間平均をとったものであり、エラーバーは平均をとった時間の間の最小値と最大値を示している。レイリー数が小さいモデルでは、運動エネルギーはゼロ、 Nu は1になっており、対流が起きていないことが分かる。レイリー数が臨界値 Ra_c を超えると対流が始まる。Fig. 11 より、運動エネルギーとヌッセルト数の両方で対流の兆候が見え始めるのは $Ra = 7.0 \times 10^3$ のモデルであることが分かる。このモデルで対流が実際に起きていることは、GFV を使った3次元可視化でも確認できた。このことから臨界レイリー数が存在する範囲は $6.0 \times 10^3 < Ra_c < 7.0 \times 10^3$ に制限されることが分かる。臨界値を超えた後、レイリー数が大きくなるにつれしばらくは対流の運動エネルギー、ヌッセルト数ともに指数関数的に上昇するが、レイリー数が 10^4 を超えた辺りから、その依存性が線形に近くなる。レイリー数が大きくなるにつれてエラーバーの幅も大きくなっており、対流構造が不安定になっていっていることが示唆される。

次に GFV の断面図表示機能を用いて、ある時刻における $z = d/2$ の面上での速度の絶対値分布を Fig. 12 に示す。(a)–(f) はレイリー数の異なるモデルに対応し、それぞれ (a) $Ra = 7.0 \times 10^3$ 、(b) $Ra = 1.5 \times 10^4$ 、(c) $Ra = 2.5 \times 10^4$ 、(d) $Ra = 3.5 \times 10^4$ 、(e) $Ra = 4.5 \times 10^4$ 、(f) $Ra = 5.5 \times 10^4$ である。 Ra が上がるにつれて、対流構造の乱れが大きくなり、系が乱流状態に移行していることが分かる。Fig. 13 に Q_{3D} の等値面表示を示す。(a)–(f) は Fig. 12 と同じモデルに対応する。等値面は各モデルの Q_{3D} の最大値の0.25%に相当し、渦構造とその空間分布

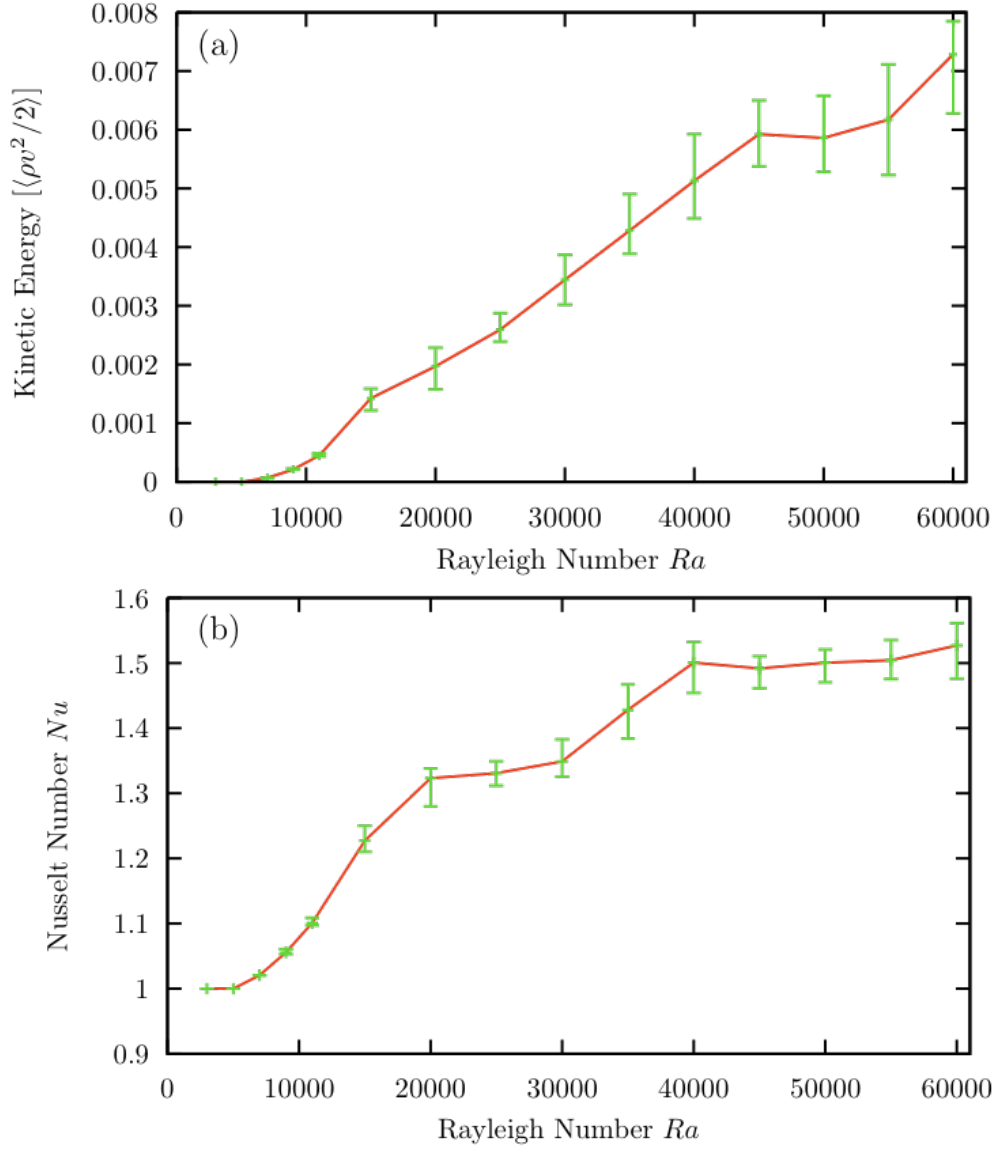


Fig. 11: The relation of the Rayleigh number to (a) the spatially-averaged kinetic energy of the convective motion ($\frac{1}{2}\rho v^2$) and (b) the Nusselt number Nu . The value is averaged for an arbitrary period at the saturated state and the error bar describes maximum and minimum values for the period.

が Ra の増大とともに変化する様子が見て取れる。比較的レイリー数が小さいモデル ($Ra_c \leq Ra \leq 2.0 \times 10^4$; Fig. 13(a)–(b)) では、渦領域は容器の一辺の長さよりも長く引き伸ばされている。レイリー数を大きくするにつれ、渦構造が分断されて細かくなり、乱流状態に移行していく。Fig. 11(a) の $Ra = 4.5 \times 10^4$ 付近に見られるレイリー数依存性の顕著な変化は、熱対流系がコヒーレントな状態から乱流状態に移行することと関係している可能性がある。

4.2 水平磁場のみを課すモデル

次に、水平磁場を課したモデルの熱対流シミュレーションの結果をまとめる。Fig. 7で示したように、磁場は x 軸正の方向に一様に課す。磁場の強さはチャンドラセカール数 $Q = 10^5$ に相当し、実験と比べて二桁程度大きな磁場をかけていることに注意されたい。ここでは、計算領域のアスペクト比が異なる2つのモデルでシミュレーションを行った。

4.2.1 計算領域のアスペクト比5のモデル

比較のため4.1節と同じアスペクト比を持つ計算領域での熱対流シミュレーションの結果を示す。計算に用いた格子数は4.1節と同様に $251 \times 251 \times 151$ で、レイリー数を $5.0 \times 10^3 \leq Ra \leq 7.5 \times 10^4$ の範囲で変化させ、熱対流の物理的性質の変化とそれに対する磁場の影響を調べた。

Fig. 14に熱対流の (a) 運動エネルギー ($\frac{1}{2}\rho v^2$) と (b) ヌッセルト数 Nu のレイリー数依存性をそれぞれ示す。Fig. 11と同様、各レイリー数での値は一定間隔で時間・空間平均をとった値であり、平均をとった時間における最小値と最大値をエラーバーで示している。Fig. 14より、臨界レイリー数が $1.0 \times 10^4 < Ra_c < 1.2 \times 10^4$ に存在し、磁場が無いモデルに比べてエラーバーが小さくなっていることが分かる。これらは、磁場が対流を抑制する効果を持つことを示唆している。

ある時刻における断面 $z = d/2$ での速度の絶対値の強度分布を Fig. 15に示す。(a)–(d)はレイリー数の異なるモデルに対応し、それぞれ (a) $Ra = 3.0 \times 10^4$ 、(b) $Ra = 5.5 \times 10^4$ 、(c) $Ra = 6.0 \times 10^4$ 、(d) $Ra = 7.5 \times 10^4$ である。全てのモデルで、磁場を課した方向に平行な軸を持つ対流ロール構造が見られる。Fig. 15(a)ではロールは5つ現れ、中央のロールほど対流の速度が大きいことが分かる。あるレイリー数までは Ra の増加に伴い、対流速度の増大が観察される (Fig. 15(b))。ところが、Fig. 15(c)に見られるように $Ra = 6.0 \times 10^4$ までレイリー数を上げると、計算領域の右端に新たなロールが出現する。このロール構造の変化は Fig. 14(a)の対流エネルギーのレイリー数依存性の中にも表れている。ロール構造が変化すると同時に、対流エネルギーのレイリー数依存性も顕著に変化しており、このこ

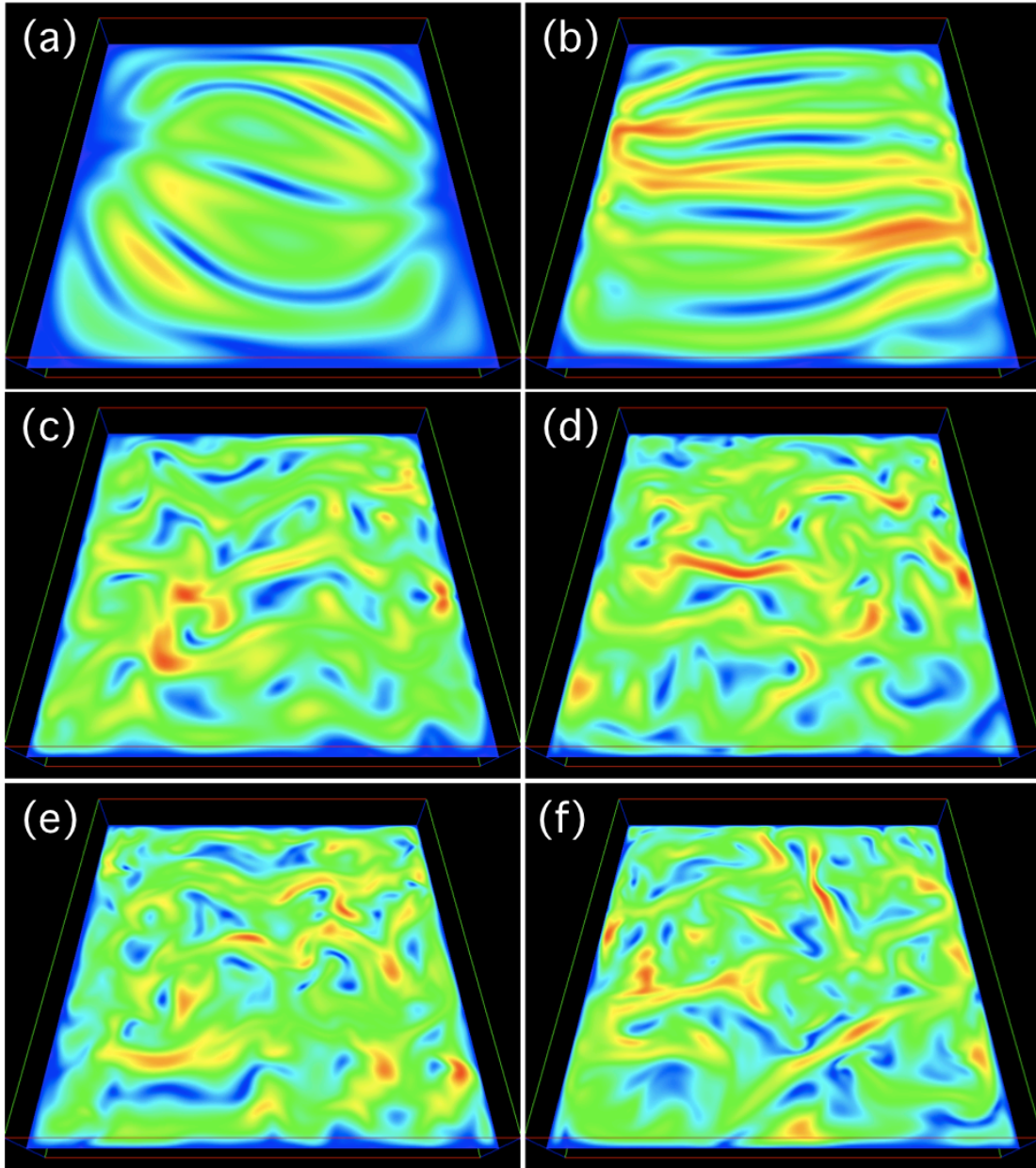


Fig. 12: The distribution of the absolute value of velocity on the cutting plane at $z = d/2$ for the models (a) $Ra = 7.0 \times 10^3$, (b) $Ra = 1.5 \times 10^4$, (c) $Ra = 2.5 \times 10^4$, (d) $Ra = 3.5 \times 10^4$, (e) $Ra = 4.5 \times 10^4$ and (f) $Ra = 5.5 \times 10^4$. The red region corresponds to the higher value and the blue corresponds to the lower value.

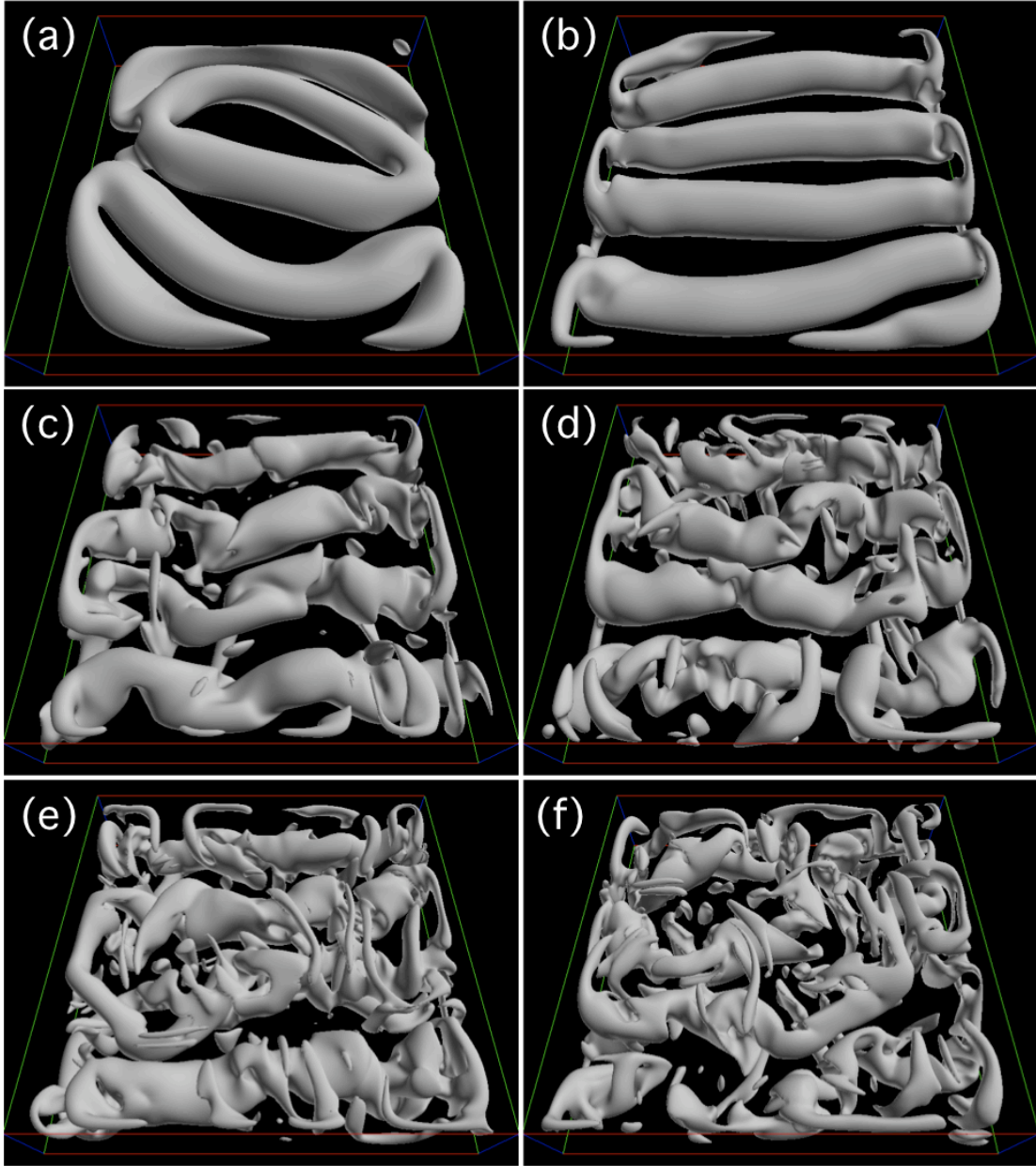


Fig. 13: Isosurfaces of Q_{3D} for the same models in Fig. 12. Each picture shows 0.25% of maximum value of Q_{3D} . These extract the vortices from the convective flow.

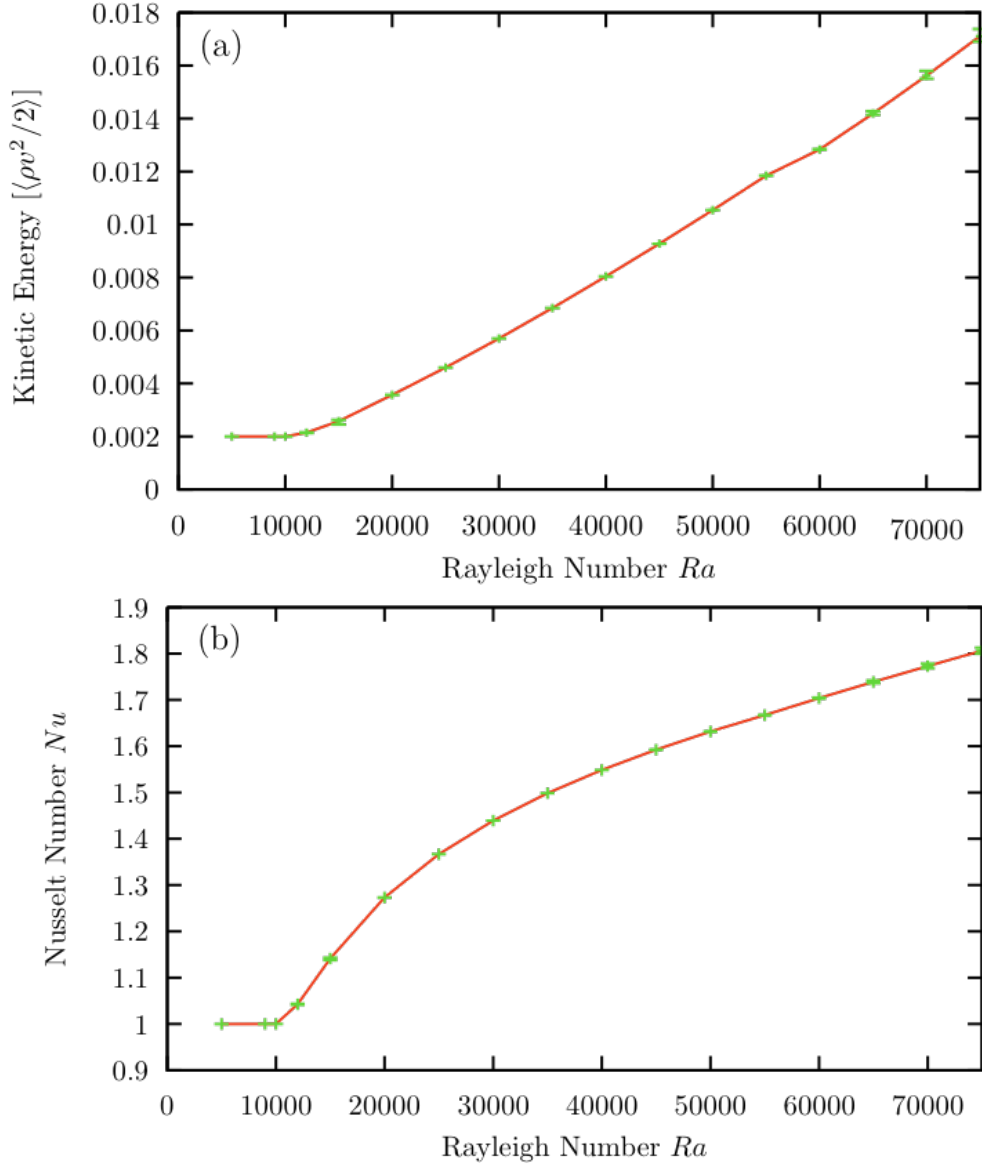


Fig. 14: (a) The relation between Rayleigh number and the spatial and time averaged kinetic energy of convective motion. (b) The relation between Nusselt number and the spatial and time averaged kinetic energy of convective motion. The error bar describes maximum and minimum value for that Rayleigh number. The critical Rayleigh number is located in between 1.0×10^4 and 1.2×10^4 .

とから $Ra = 6.0 \times 10^4$ は遷移レイリー数 (transition Rayleigh number) に対応するパラメータであると考えられる。

Fig. 16 に、Fig. 15 の各モデルを異なる手法で可視化した結果を示す。それぞれ $x = W/2$ での速度の3次元矢印表示、zy 平面での Q_{3D} の断面図、異なる10点の出発点からのパーティクルトレーサーの実行結果を同時に表示している。ここで W は計算領域の x 軸方向の辺の長さである。

Q_{3D} の断面図を見ると、レイリー数が増加するにつれロールの渦強度が強まることが分かる。また速度の矢印表示から、隣り合うロールの対流の向きは逆転していることが分かる。パーティクルトレーサーの軌跡を見ると、流線がロールの軸に沿った螺旋型構造をとっていることが分かる。ここで、パーティクルトレーサーの出発点は全てのモデルで共通で、 $x = W/2$ の面を挟んで対称である。また、トレーサー粒子の出発点とロール軸の距離は、図の左から右に向かって徐々に大きくなるように設定している。Fig. 15 から、トレーサーの出発点と対流ロールの軸との距離に比例して、流線が描く螺旋の半径も大きくなっていることが分かる。対称面 $x = W/2$ から離れた場所では、流線は対称面に向かって螺旋を描きながら進む。螺旋の半径は対称面に近づくにつれて大きくなり、同時に回転速度は小さくなる。螺旋の半径が一定値を超えた時、あるいはトレーサー粒子の出発点とロールの軸からの距離が一定値を超えていた場合、流線は対称面とは反対の方向へと向かう。

Fig. 17(b) は Fig. 16(d) のモデルの最も右端の流線を拡大表示したものである。このトレーサー粒子の初期位置は、ロールの軸から大きく離れていたため、流線は外側へと向かっている。一方、Fig. 17(a) はこのモデルのトレーサー粒子の出発点をロールの軸に近づけた場合で、流線は対称面方向 (内向き) に進む。この場合の螺旋 (ヘリシティー) の向きはどちらも右巻きである。螺旋の巻き方は隣接するロールで互い違いになっている。また、螺旋のピッチは磁場 (チャンドラセカル数 Q) を弱くすると小さくなることが確認できた。

ある時刻での $Ra = 7.5 \times 10^4$ のモデルの磁場の絶対値の断面図を Fig. 18(a) に示す。磁場は一様に課されているにも関わらず、その強度分布には偏りが見られる。外部から課されている一様磁場の強度はカラーマップで緑色に相当している。Fig. 18(b) のように、速度場を矢印で同時に表示すると、色が赤や青になっている部分は隣り合うロールの間に位置していることが分かる。更に、対流が収束 (converge) する部分で磁場が強まり、逆に発散 (diverge) する場所で磁場が弱まっていることが分かった。他のモデルでも同様の構造が見られた。

対流ロールの向きと水平磁場の向きの関係を知るために、磁場を課す方向を計算領域の対角線方向に変更したモデルについても調べた。一つの例として、 $Q = 10^5$ 、 $Ra = 7.5 \times 10^4$ のモデルの可視化結果を示す。Fig. 19(a) では磁場の絶対値の断面図と、パーティクルトレーサーの軌跡を表示している。一方、Fig. 19(b)

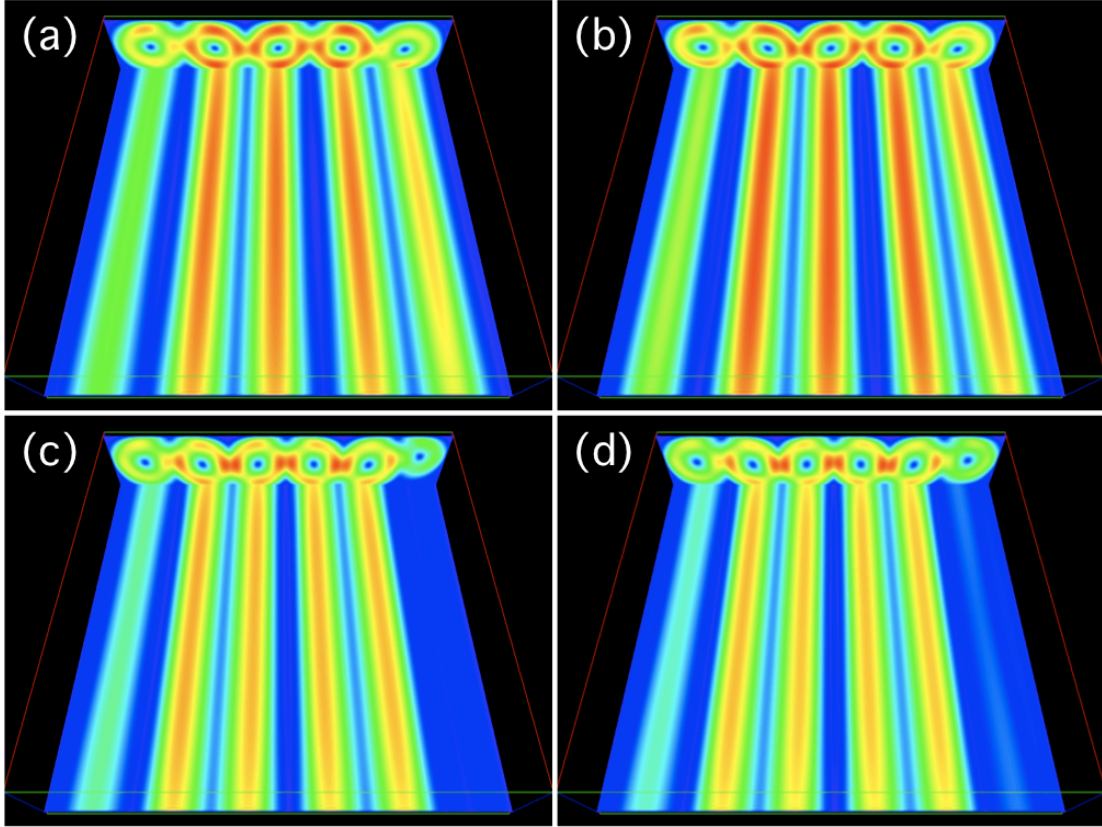


Fig. 15: The visualization by GFV for the models with horizontal magnetic field of $Q = 10^5$. The distribution of absolute value of velocity on the side and bottom walls for the models (a) $Ra = 3.0 \times 10^4$, (b) $Ra = 5.5 \times 10^4$, (c) $Ra = 6.0 \times 10^4$ and (d) $Ra = 7.5 \times 10^4$. Convection rolls whose axes are parallel to the imposed magnetic field are emerged. When Ra exceeds 5.5×10^4 , the number of rolls is increased for 5 to 6.

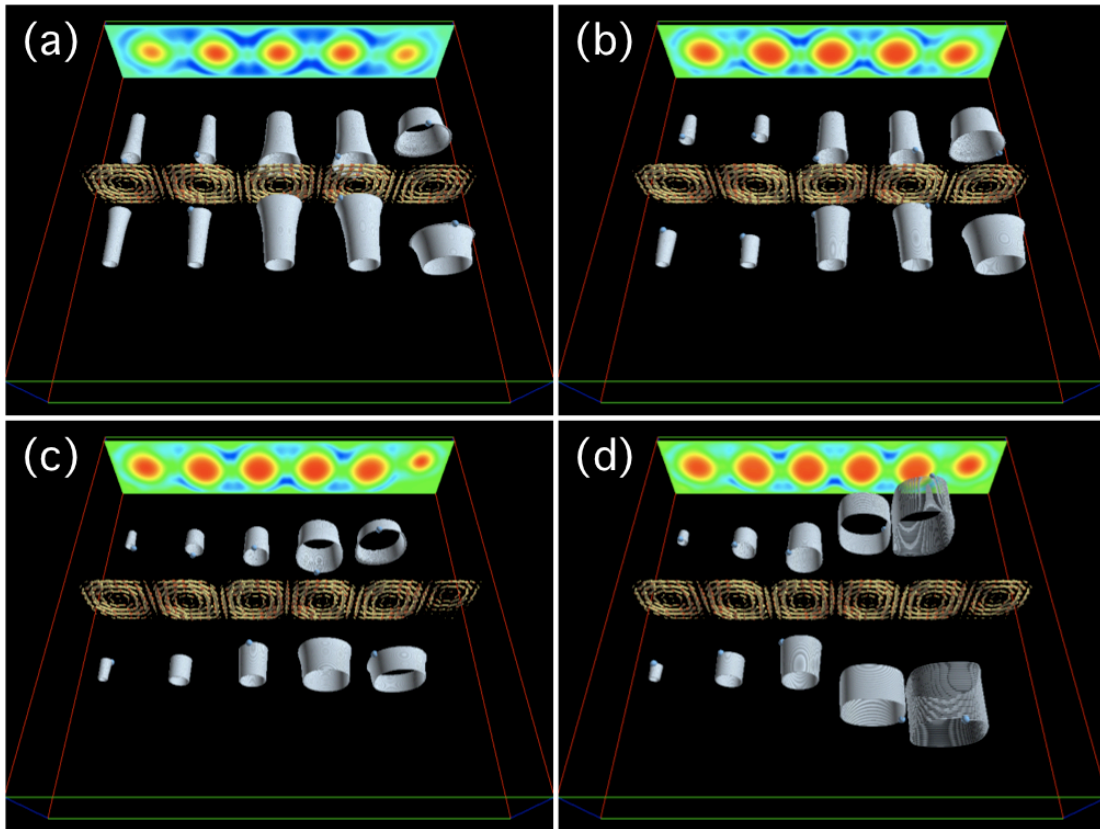


Fig. 16: 3D arrows of velocity, slice of Q_{3D} and trajectories of particle tracer for the same models in Fig. 15. The starting positions of particles are common to all models. We can find helical flow structures along to the roll.

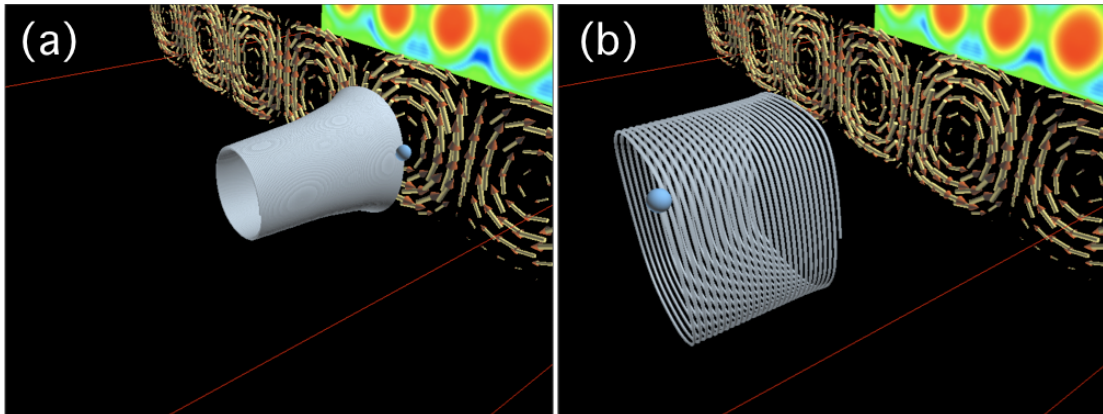


Fig. 17: Helical flow structure drawn by particle tracer for the model with $Ra = 7.5 \times 10^4$. The starting position of particle tracer is different between panel (a) and (b). Panel (a) shows the trajectory of particle tracers with starting position closer to the axis of roll than that showed in panel (b). While the particle moves toward the center of the domain for the case (a), it moves outside for the case (b).

は磁場の絶対値の断面図と速度場の矢印を同時に表示している。x 軸方向に磁場を課したモデルと同様に、ロールの軸は磁場の方向に平行であることが分かる。また、可視化結果から、磁場を課したモデルの特徴でもある、流線の螺旋構造や磁場の寄せ集めと掃き出しが確認できた。一方、磁場を課す方向の違いは、臨界レイリー数に定量的な変化をもたらした。x 軸方向に磁場を課した場合に比べて臨界レイリー数 Ra_c は大きくなったのである。これは、対流ロールが直方体領域の対直線に沿って形成されたことで、ロールと壁との接地面積が増え、壁の影響が大きくなったためであると考えられる。

柳澤らが2011年に行った実験では、水平磁場に平行な軸を持つ対流ロール構造の形成が報告されており、シミュレーションでも同様のロール構造が確認できた。また、実験ではレイリー数 Ra が大きくなると流れが乱流状態に移行し、ロール構造が消失することも報告されていたが、シミュレーションでも同様の遷移が見られた。一方、実験で観測されたロールの数は4本であり、実験とシミュレーション結果の間にある定量的な違いや、その違いに対するチャンドラセカル数や磁気プラントル数の影響について、今後さらに詳しく調べる必要がある。また、実験では対流ロールの流れの向きは不規則な時間間隔で逆転することが報告されているが、今回の計算の範囲では流れの逆転は見られていない。もしかすると、逆転が起こる時間スケールまで熱対流をシミュレート出来ていない可能性もある。今後さらに長時間の計算を行うことで対流構造の逆転を支配する物理についても詳しく調査する。

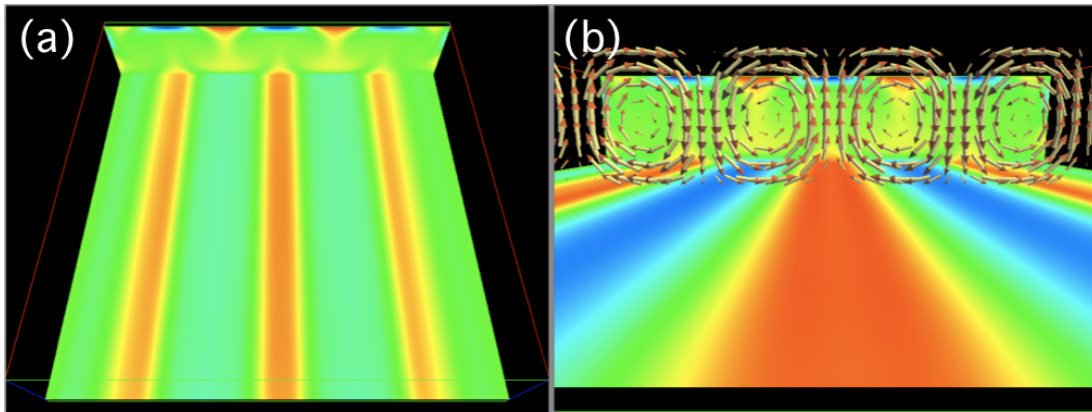


Fig. 18: (a) The distribution of absolute value of magnetic field on the side and bottom walls of the model with $Ra = 7.5 \times 10^4$. (b) Arrows of velocity field are visualized simultaneously. This shows that the magnetic field is enhanced where the convection converges and is weakened where it diverges.

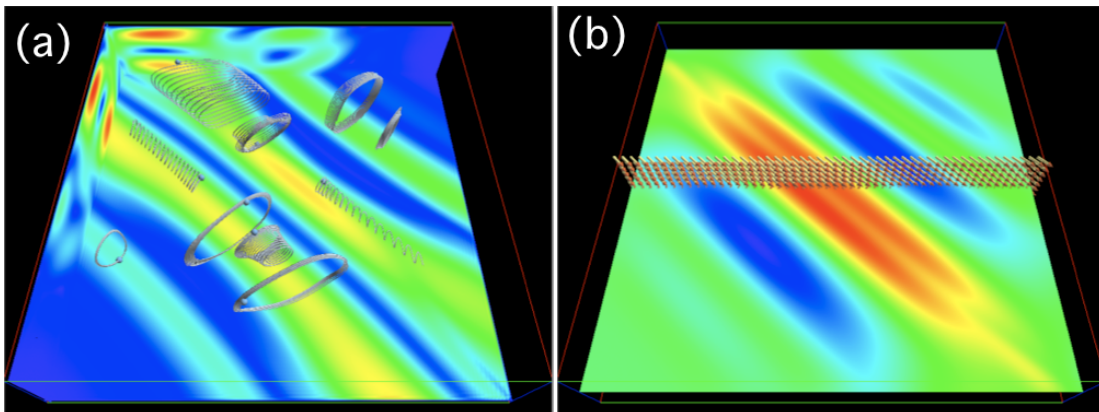


Fig. 19: The visualization of the model in which the horizontal magnetic field is imposed obliquely. (a) The distributions of absolute value of velocity on the side and bottom walls for the model $Ra = 7.5 \times 10^4$. The trajectories are drawn by particle tracer. (b) The distribution of absolute value of magnetic field. The arrows indicate the direction of magnetic field.

4.2.2 アスペクト比4の領域でのシミュレーション

柳澤らは、幅200mm、奥行き（磁場を課す方向）50mm、高さ50mm、アスペクト比4の容器を使った熱対流実験も行なっている [17]。この節では、シミュレーション領域のアスペクト比を4に変え、モデル計算を行った結果をまとめる。全てのモデルにおいてチャンドラセカール数 $Q = 10^5$ であり、格子数は $301 \times 76 \times 76$ である。レイリー数は $4.0 \times 10^4 \leq Ra \leq 8.0 \times 10^5$ の範囲で変化させ、熱対流の物理的性質の変化を調べた。

Fig. 20 は $Ra = 2.8 \times 10^5$ において、時間発展に伴う空間平均した運動エネルギーの値の変化をプロットしている。横軸の時間は音波横断時間（sound crossing time）で規格化されている。Fig. 21 は Fig. 20 の準定常状態における点 (a)–(f) に対応した時刻での、速度の絶対値の断面図をそれぞれ表している。Fig. 20 と Fig. 21(a)–(f) を見比べると、時間変化の傾きの変動と対流構造の変化が連動していることが分かる。対流が準定常に到達した後、時刻 (a) の時点では、対流ロールは5つである。その後、(c)–(d) では中央のロールから、隣り合うロール同士が混ざり合い始める。この過程が進行する際、Fig. 20 に示されるように、対流の運動エネルギーは減少する。(d) から (f) にかけて運動エネルギーは再び上昇する。この時ロールの構造は4本の安定した形へと変わり、時間発展していく。このように熱対流は、準定常になった後も構造を変化させることがある。

Fig. 22 では計算モデルのレイリー数に対する時間・空間平均化した対流の運動エネルギーの依存性を調べている。レイリー数は $4.0 \times 10^4 \leq Ra \leq 8.0 \times 10^5$ の範囲で変化させている。図より、この時の臨界レイリー数は $5.5 \times 10^4 < Ra_c < 5.75 \times 10^4$ に存在すると考えられる。また、レイリー数依存性が顕著に変化している点が複数存在することが見て取れる。(a)–(f) は、レイリー数が変化した前後のモデルに対応しており、各モデルの速度の絶対値の断面図表示を Fig. 23 に示す。それぞれに対応するレイリー数は、(a) $Ra = 1.2 \times 10^5$ 、(b) $Ra = 1.25 \times 10^5$ 、(c) $Ra = 2.5 \times 10^5$ 、(d) $Ra = 2.8 \times 10^5$ 、(e) $Ra = 5.0 \times 10^5$ 、(f) $Ra = 5.25 \times 10^5$ である。最初の変化は (b) $Ra = 1.25 \times 10^5$ で起こる。Fig. 23 の (a) と (b) に示されている速度の絶対値の断面図表示を比較すると、対流の構造が4本のロールから、ほぼ同じ半径の5本のロール構造へと遷移していることが分かる。その後、依存性は線形になるが、(d) $Ra = 2.8 \times 10^5$ で再び依存性に顕著な変化が現れる。この変化の前後に対応するモデルの速度絶対値の断面図表示が Fig. 23(c) と (d) である。レイリー数依存性の顕著な変化が起こる前後で、ロールの数が5本から4本に再帰することが分かる。ロールの数が4本に戻った後、しばらくは線形な依存性を見せる。再び依存性が変化する (f) $Ra = 5.25 \times 10^4$ 付近では、Fig. 23(e) の右下に見られる小さなロールが、隣のロールへと吸収される。このように、アスペクト比4のモデルでは、対流構造が変化する遷移レイリー数が複数個観察された。

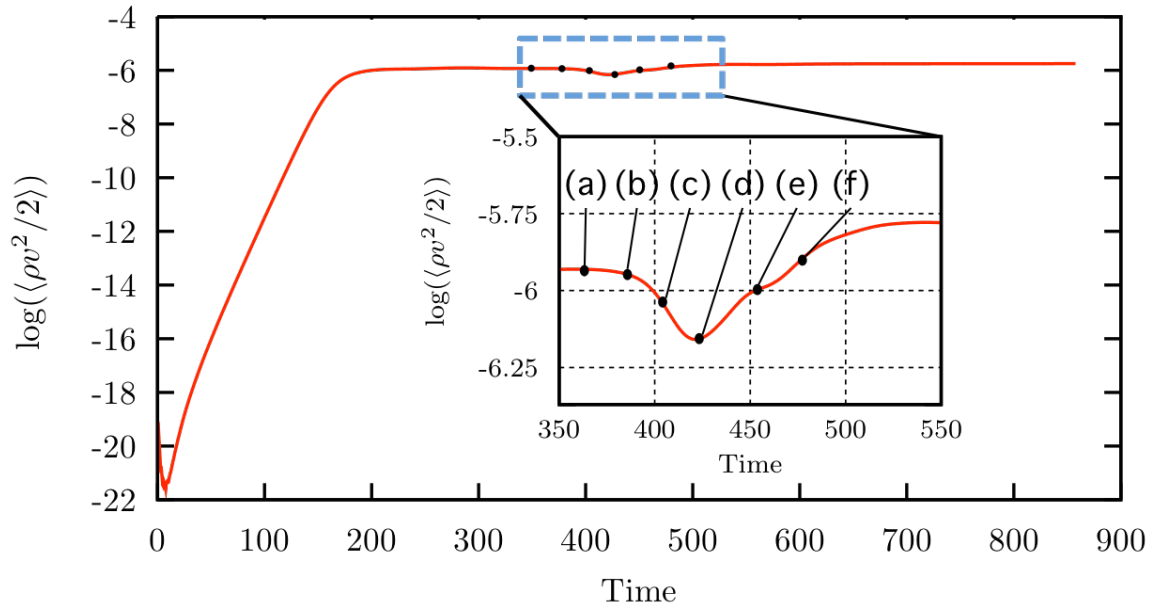


Fig. 20: The evolution of the spatially-averaged kinetic energy of the convective motion for the model with $Ra = 2.8 \times 10^5$ and $Q = 10^5$ when aspect ratio of 4. The slope is changed closely with the change of convective structure.

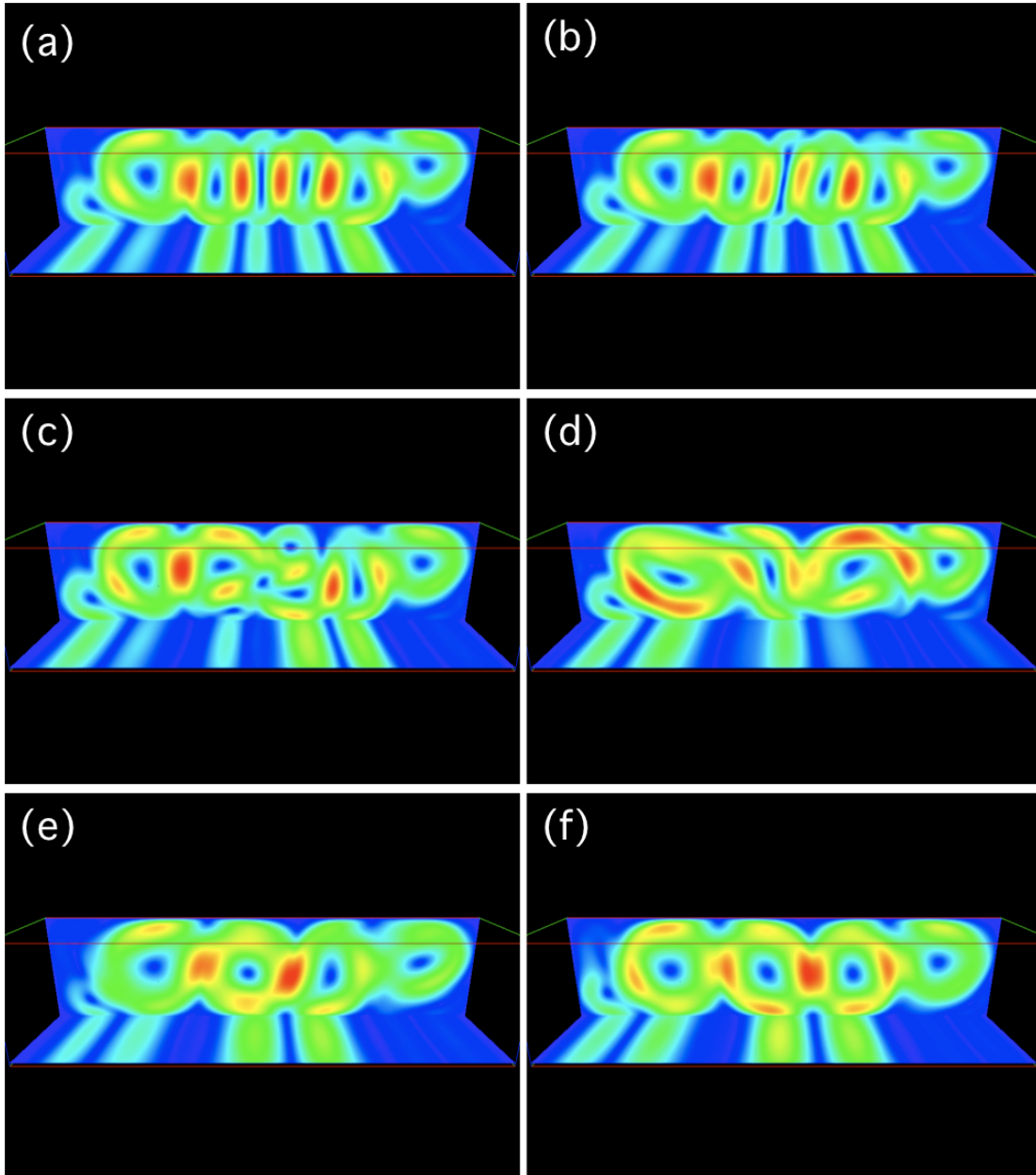


Fig. 21: The evolution of convective structure for the same models in Fig. 20. The convective structures at the times (a)–(f) of Fig. 20 are visualized respectively.

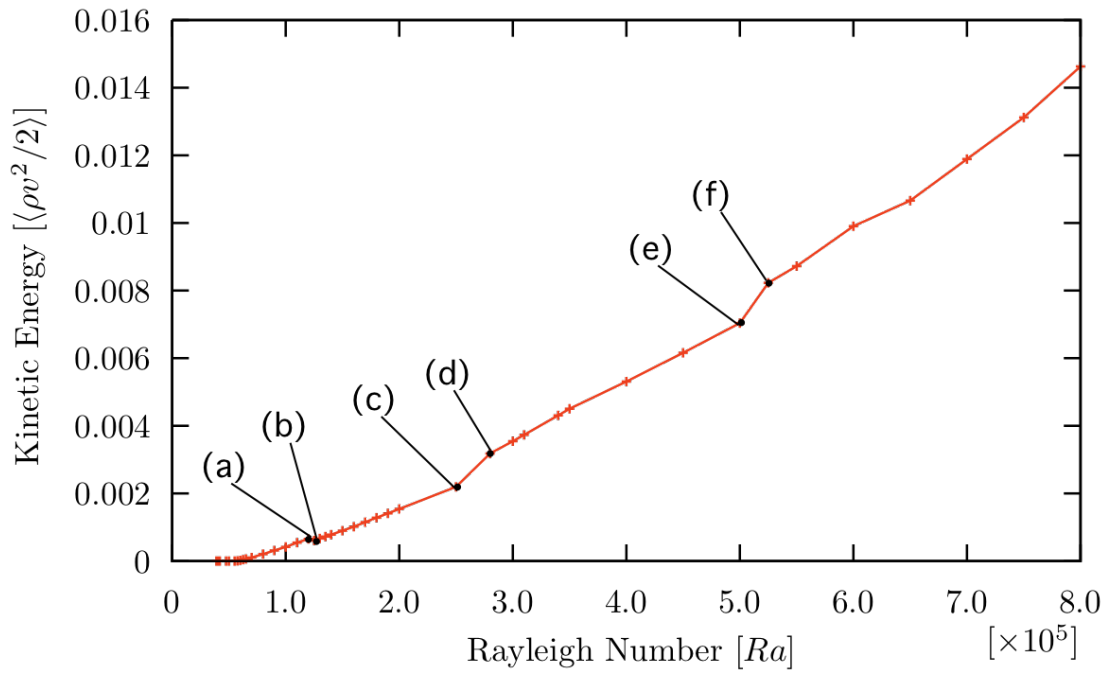


Fig. 22: Spatially-averaged kinetic energy of the convective motion as a function of Rayleigh number for the models with horizontal magnetic field when aspect ratio of 4. The structure of convective roll is changed at the Rayleigh number at which the slope changes.

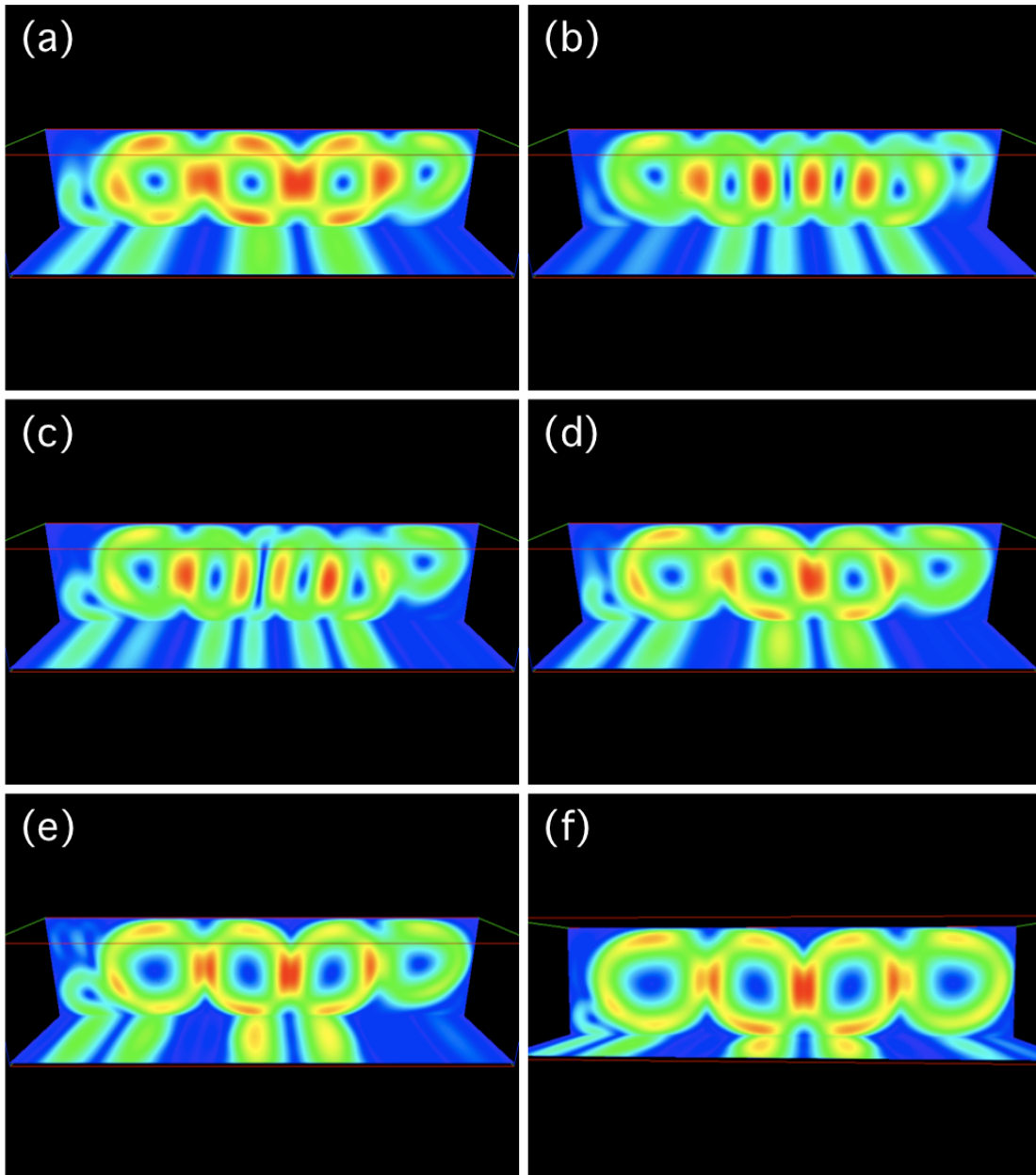


Fig. 23: Absolute value of velocity is visualized for the models around transition Rayleigh number corresponding to (a)–(f) in Fig. 22. The initial change of convective rolls happens between (a) $Ra = 1.2 \times 10^5$ and (b) $Ra = 1.25 \times 10^5$. The second is between (c) $Ra = 2.5 \times 10^5$ and (d) $Ra = 2.8 \times 10^5$ and the third is between (e) $Ra = 5.0 \times 10^5$ and (f) $Ra = 5.25 \times 10^5$.

4.3 回転のみを課したモデル

最後に、回転のみを課したモデルでの熱対流シミュレーションの結果を示す。回転ベクトルは Fig. 7 に示したように、 z 軸正の向きで、回転の速さの指標であるエクマン数 Ek をパラメータとして変化させる。回転角速度 $\Omega = 0$ の場合は $Ek = \infty$ である。計算に用いた格子数は $431 \times 431 \times 151$ である。

Fig. 24 に、各モデルの速度の z 成分の断面図表示、Fig. 25 に Q_{3D} の等値面表示の結果を示す。等値面は各モデルの Q_{3D} の最大値の 0.75% に相当している。それぞれのモデルのレイリー数とエクマン数は (a) $Ra = 9.5 \times 10^4$, $Ek = \infty$ 、(b) $Ra = 9.5 \times 10^4$, $Ek = 1.0 \times 10^{-1}$ 、(c) $Ra = 9.5 \times 10^4$, $Ek = 1.0 \times 10^{-2}$ 、(d) $Ra = 6.0 \times 10^5$, $Ek = 1.0 \times 10^{-3}$ 、(e) $Ra = 3.0 \times 10^6$, $Ek = 1.0 \times 10^{-4}$ 、(f) $Ra = 5.1 \times 10^7$, $Ek = 1.0 \times 10^{-5}$ である。

モデル (a)–(c) のレイリー数は $Ra = 9.5 \times 10^4$ で、4.1 節で示した磁場も回転も課さないモデルと比較して大きな値を採用しているため、系は乱流状態になっている。一方、(d)–(e) の $1.0 \times 10^{-3} \leq Ek \leq 1.0 \times 10^{-5}$ の範囲では、エクマン数が減少するにつれ、対流構造が細かくなっていることが見て取れる。 $Ek = 1.0 \times 10^{-4}$ のモデル (e) になると、回転軸の方向に軸を持つ渦の柱が現れ始める。更に回転速度を大きくしたモデル (f) では、渦の柱がより顕著になり、渦構造の空間スケールが更に小さくなる。これらの図からエクマン数が小さくなる、すなわち回転が速くなるにつれ、対流構造が細かくなり、対流渦の軸が回転軸に平行になっていくことが分かる。これらの結果は、高速回転が渦を回転軸方向に引き伸ばす効果を持っていることを示唆する。物理的には、高速回転にともなう強いコリオリ力によって、対流運動が回転軸に平行な方向に制限される。その結果、渦が回転軸方向にコリメートされ、回転の速度に比例して回転渦が小さくなると考えられる。

Fig. 25 のモデル (f) に GFV のパーティクルトレーサー機能を適用した結果を Fig. 26 に示す。Fig. 26(a) では、 Q_{3D} の等値面と、速度の 3 次元矢印同時に表示している。この図から回転軸に平行に、螺旋状の渦構造が無数に形成されていることが分かる。また、螺旋構造が計算領域の中心 (高さ $\simeq d/2$) で収束していることも可視化結果から見て取れる。この渦構造をより詳しく調べるために、Fig. 26(b) では、ある開始点からスタートしたパーティクルトレーサーの軌跡に注目する。左側の下面から出発したトレーサー粒子は、まず左巻きの螺旋を描きながら上昇する。その際、螺旋のピッチは $z = d/2$ の面に近づくにつれ大きくなる。トレーサー粒子がこの面を横切った瞬間、螺旋の向きが逆転し、右巻きに遷移する。計算領域上部でのトレーサー粒子の運動は右巻きの螺旋状であり、上面に近づくにつれそのピッチは小さくなる。上面からの距離がある値に達したところで、トレーサー粒子の動きは一旦 xy 平面上の動きへと移行し、 xy 平面をしばらく移動した後、今度は下降に転じる。トレーサー粒子が下降する際の螺旋運動とその $z \simeq d/2$

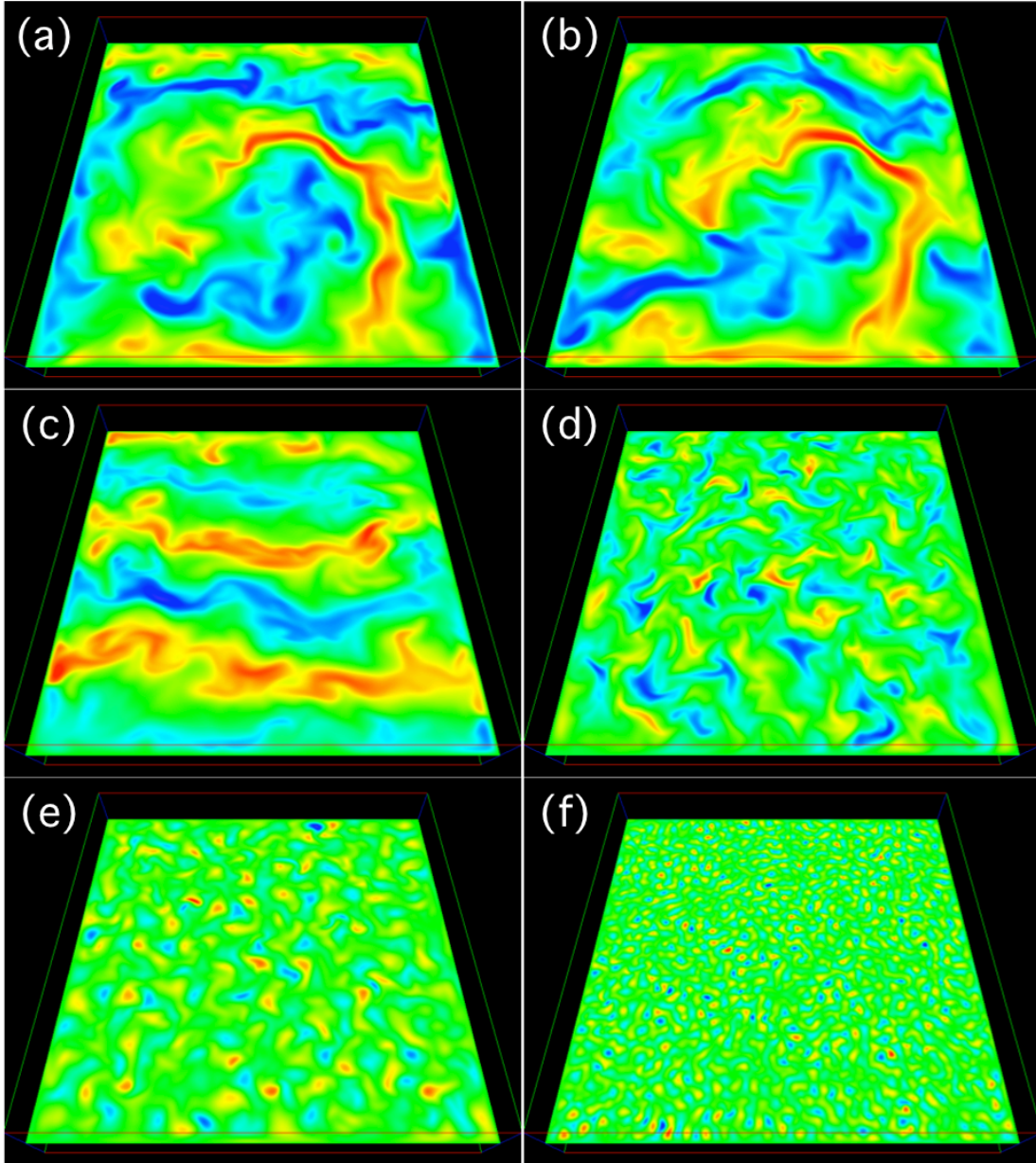


Fig. 24: The visualization of z -component of velocity for the model with (a) $Ra = 9.5 \times 10^4$, $Ek = \infty$ (b) $Ra = 9.5 \times 10^4$, $Ek = 1.0 \times 10^{-1}$ (c) $Ra = 9.5 \times 10^4$, $Ek = 1.0 \times 10^{-2}$ (d) $Ra = 6.0 \times 10^5$, $Ek = 1.0 \times 10^{-3}$ (e) $Ra = 3.0 \times 10^6$, $Ek = 1.0 \times 10^{-4}$ and (f) $Ra = 5.1 \times 10^7$, $Ek = 1.0 \times 10^{-5}$. Rapid rotation induces finer convection cells.

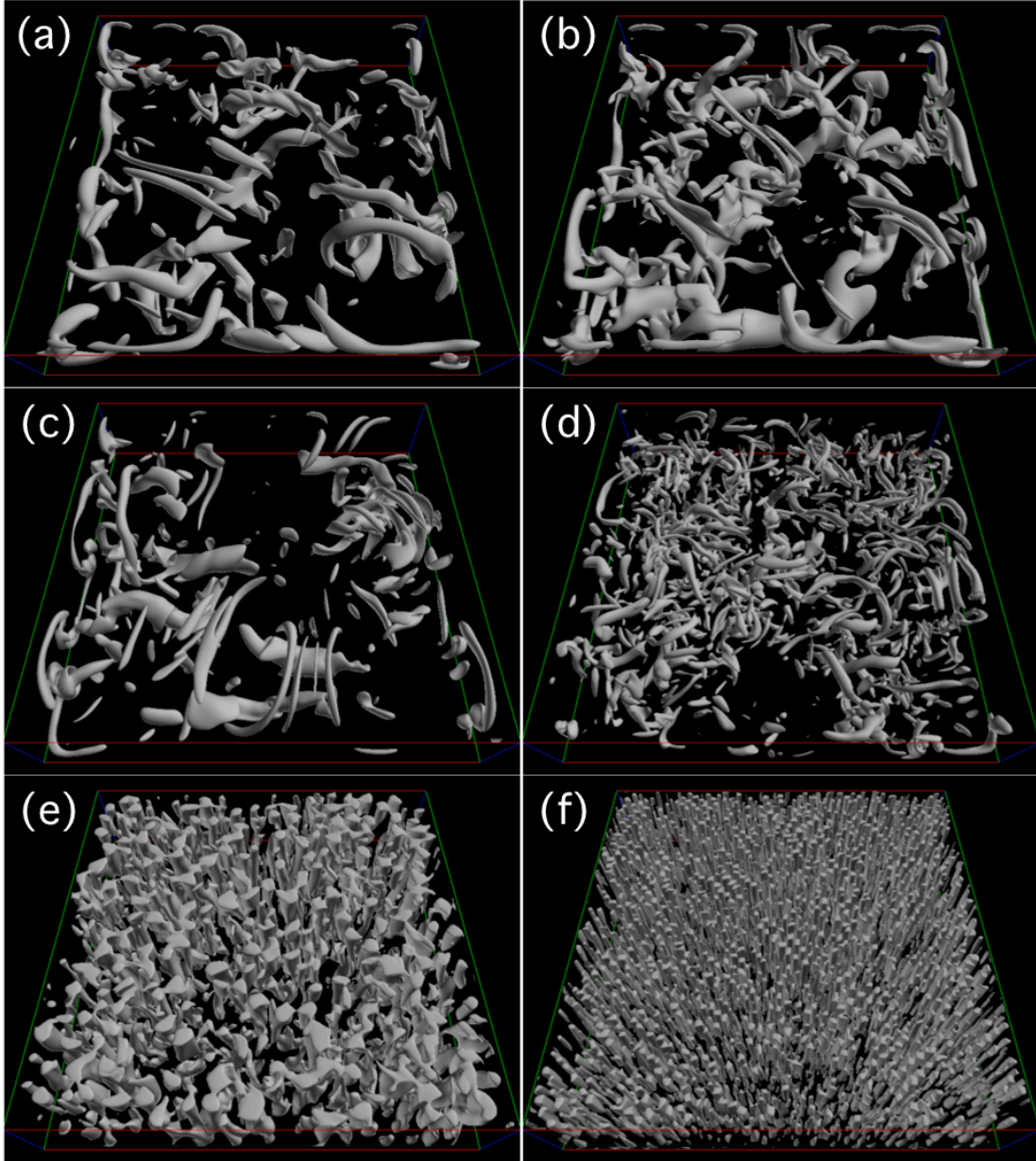


Fig. 25: Isosurfaces of Q_{3D} for the same models as Fig. 24. The axes of vortices become parallel to z-axis for the model with $Ek = 10^{-4}$ and vortices become finer when decreasing Ek .

での逆転の振る舞いは上昇の際とほぼ同じだが、螺旋の向きは $z > H/2$ で左巻き、 $z < H/2$ で右巻きになる。

Chandrasekhar (1961) は、このような螺旋状の対流構造の存在を線形理論に基づいて指摘している。Fig. 27 に、Chandrasekhar が予言した対流渦構造を模式的に示す。本研究で見出した回転熱対流の対流構造と極めて良く似ていることが分かる。螺旋渦の物理的性質についても、シミュレーション結果と Chandrasekhar が予言したモデルは良く一致している。このような渦構造の存在は、従来の熱対流シミュレーション研究では発見されておらず、本結果は Chandrasekhar の線形理論に基づいた予言を非線形シミュレーションで確認した初めての例だと言える。

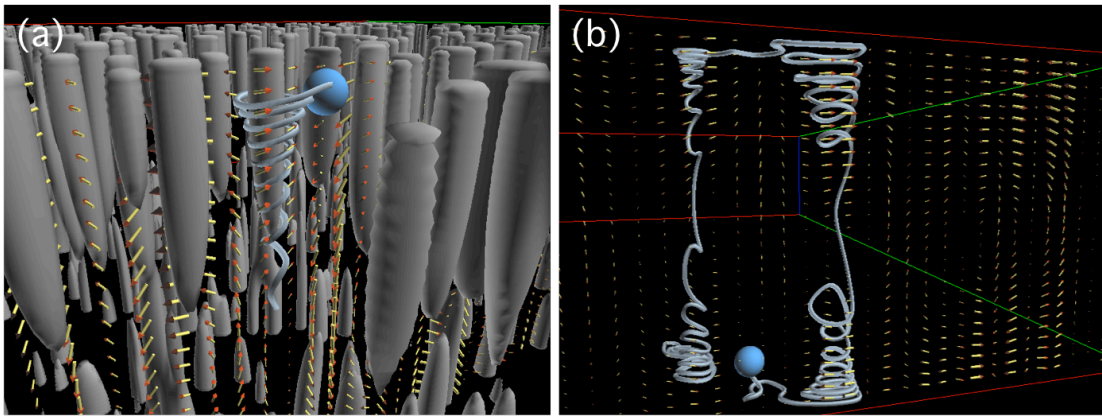


Fig. 26: Vortex structures for the model with $Ra = 5.1 \times 10^7$ and $Ek = 1.0 \times 10^{-5}$. (a) Particle tracer with isosurfaces of Q_{3D} and 3D arrows of velocity field. Isosurfaces of Q_{3D} captures the vortices accurately. (b) The trajectory of a particle tracer with velocity arrows.

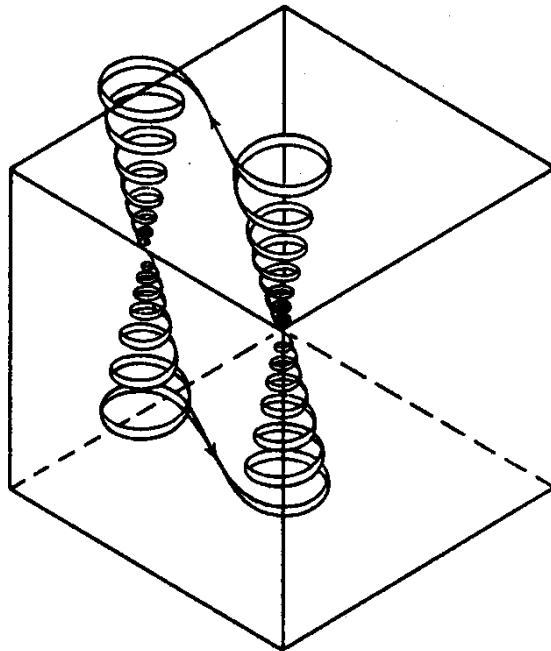


Fig. 27: A perspective sketch of the path of a fluid particle in a square cell showed by Chandrasekhar[11].

5 まとめ

本研究では MHD 流体の熱対流シミュレーションコードを用いて、液体ガリウムの熱対流実験を模したシミュレーションを行い、得られたデータを新たに開発した3次元可視化ツール“GFV (Gallium Field Visualizer)”を用いて解析した。シミュレーションの実行には地球シミュレータを用いた。本研究で調べたモデルは、i) 磁場も回転も課さないモデル、ii) 水平磁場のみを課すモデル、iii) 回転のみを課すモデルの3つである。標準的なモデルでは、実験で使われている3辺の比5:5:1 (アスペクト比5) の直方体容器を模擬した計算領域を採用した。

磁場も回転も課さない熱対流のみの性質を調べたモデル i) では、対流が始まる臨界レイリー数を見だし、レイリー数が上がるにつれて、対流がコヒーレントな状態から乱流状態へと移行していくことを確認した。外部磁場を加えたモデル ii) では、実験で見いだされたものと同様の、課された磁場に平行な軸を持つ対流ロールが形成されることを確認した。さらに、アスペクト比が4の計算領域を用いた熱対流モデルについても磁場の効果を調べた。このモデルでは、Malkus (1954) が水の対流実験で発見した遷移レイリー数の存在を確認した。遷移レイリー数の前後では、対流の構造が変化する。また、GFV の可視化機能を駆使して対流渦を多角的に解析することで、対流構造の遷移が時間発展の途中に突然現れることを発見した。回転を課したモデル iii) は実験に先行しているため、実際の実験結果と比較することはできないが、回転の効果によって、回転軸方向に沿った軸を持つ渦柱が出現することが分かった。この渦柱は、計算領域の上下で螺旋の向きが逆転した構造を持ち、回転速度が上がるにつれてその半径は小さくなる。さらにパーティクルトレーサーによる可視化で、シミュレーションの中で生成維持された渦が、S.Chandrasekhar (1961) が線形理論に基づき予言した螺旋渦構造に極めて良く似た構造を持っていることを確認した。回転を課したモデルで得られた結果と同様の現象が、今後の実験で観測されることが期待される。

本研究で行った熱対流シミュレーションと GFV による可視化で、今後の実験への幾つかの重要な示唆が得られた。まずモデル i) では、レイリー数 Ra の増加にともなってコヒーレントな渦が徐々に分断され、乱流状態へと遷移していく様子がはっきりと確認できた。さらに、磁場をかけたモデル ii) では、実験では発見されていなかった、対流ロールに沿った流れ場の螺旋構造の存在や、対流による磁場の寄せ集めの存在を見いだした。

実際の実験では、超音波流速分布測定法 (UVP) を用いているため、1次元的速度分布しか得ることができず、磁場や速度場の空間構造を知る術は無い。故に、実験と相補的なシミュレーションや可視化によって場の3次元構造を予測し、物理現象の理解に結びつける手法は有用である。また、GFV による可視化では、実験では発見しづらい構造も見いだすことができる。例えば、渦構造の抽出に用

いた渦検出値 Q_{3D} は、シミュレートした流れ場の理解に大きく貢献した。これまで渦構造の検出のために、パーティクルトレーサーを使った検出をした例が多々あったが、領域全体から全ての渦構造を同時に抜き出すことは難しかった。GFVによる Q_{3D} の等値面表示を行うことで、3次元的な値の分布を視認することが容易になり、渦の位置を直感的に理解することが可能になった。モデル i) の解析の際、臨界レイリー数 Ra_c に近いレイリー数で見いだした、計算領域の幅より長い渦構造 (Fig. 13(a),(b)) や、低エクマン数の熱対流計算で見られた計算領域全体に広がる渦柱の分布 (Fig. 25(e),(f)) などは、 Q_{3D} を用いた可視化の利点を示す好例である。

最後に、今後の課題についてまとめる。本研究では、シミュレーションの時間刻み幅の制限を緩和するために、液体金属の電気抵抗のパラメータを現実より大きな値に設定している。シミュレーションと実験とのより定量的な比較のために、今後は熱対流シミュレーションで用いる電気抵抗を現実的な値に近づける必要がある。また、水平磁場を課した実験で確認されている流れ場の逆転をシミュレーションで再現するためには、より長時間のシミュレーションを行う必要がある。他にも、今回調べたモデルよりさらに回転速度を大きく (エクマン数を小さく) した熱対流モデルについて調べることで、地球外核内の液体金属熱対流が受ける地球の自転の影響やダイナモに対する示唆が得られる可能性がある。これらの課題を解決するためには、現状よりも遥かに長い時間積分と、より高解像度のシミュレーションが必要になる。飛躍的な発展を遂げるスーパーコンピュータの計算性能を最大限活かしたシミュレーションを行うために、今後は使用する計算機に応じたシミュレーションコードの並列化や最適化が不可欠だと考えられる。

参考文献

- [1] S. Stanley and G. A. Glatzmaier, “Dynamo models for planets other than Earth,” *Space science reviews*, Vol. 152, No. 1, pp. 617–649 (2010)
- [2] <http://www.pbs.org/wgbh/nova/magnetic/timeline.html>
- [3] A. Kageyama, M. M. Ochi and T. Sato, “Flip-flop transitions of the magnetic intensity and polarity reversals in the magnetohydrodynamic dynamo,” *Physical review letters*, Vol. 82, No. 26, pp. 5409–5412 (1999)
- [4] J. Li, T. Sato and A. Kageyama, “Repeated and sudden reversals of the dipole field generated by a spherical dynamo action,” *Science*, Vol. 295, No. 5561, pp.1887–1890 (2002)
- [5] 陰山聡, 『コンパスはなぜ北を指すのか?』, 岩波「化学」, Vol. 77, pp. 532–538 (2007)
- [6] G. A. Glatzmaier, R. S. Coe, L. Hongre and P. H. Roberts, “The role of the Earth’s mantle in controlling the frequency of geomagnetic reversals,” *Nature*, Vol. 401, No. 6756, pp. 885–890 (1999)
- [7] 日本流体力学会編, “流体力学ハンドブック,” 丸善, pp. 290–291, 722–723 (1998)
- [8] E. A. Spiegel, “Convective Instability in a Compressible Atmosphere. I.,” *The Astrophysical Journal*, Vol. 141, pp. 1068–1090 (1965)
- [9] E. Graham, “Numerical simulation of two-dimensional compressible convection,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 70, pp. 689–703 (1975)
- [10] H. Bénard, “Les Tourbillons Cellulaires dans une Nappe Liquide Transportant de la Chaleur par Convection en Régime Permanent,” *Annales de Chimie et de Physique*, Vol. 23, pp. 62–144 (1901)
- [11] S. Chandrasekhar, “Hydrodynamic and hydromagnetic stability,” *Oxford University Press, London* (1961)
- [12] L. Davoust, M. D. Cowley, R. Moreau, and R. Bolcato, “Buoyancy-driven convection with a uniform magnetic field. Part 2. Experimental investigation,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 400, No. 1, pp. 59–90 (1999)

- [13] B. Hof, A. Juel and T. Mullin, “Magnetohydrodynamic damping of oscillations in low-Prandtl-number convection,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 545, pp. 193–202 (2005)
- [14] H. K. Pharasi, R. Kannan, K. Kumar and J. K. Bhattacharjee, “Turbulence in rotating Rayleigh-Bénard convection in low-Prandtl-number fluids,” *Physical Review E*, Vol. 84, No. 4, 047301 (2011)
- [15] S. Stellmach and U. Hansen, “Cartesian convection driven dynamos at low Ekman number,” *Physical Review E*, Vol. 70, No. 5, 056312 (2004)
- [16] T. Yanagisawa, Y. Yamagishi, Y. Hamano, Y. Tasaka, M. Yoshida, K. Yano, and Y. Takeda, “Structure of large-scale flows and their oscillation in the thermal convection of liquid gallium,” *Physical Review E*, Vol. 82, No. 1, 016320 (2010)
- [17] T. Yanagisawa, Y. Yamagishi, Y. Hamano, Y. Tasaka, K. Yano, J. Takahashi, and Y. Takeda, “Detailed investigation of thermal convection in a liquid metal under a horizontal magnetic field: Suppression of oscillatory flow observed by velocity profiles,” *Physical Review E*, Vol. 82, No. 5, 056306 (2010)
- [18] T. Yanagisawa, Y. Yamagishi, Y. Hamano, Y. Tasaka, and Y. Takeda, “Spontaneous flow reversals in Rayleigh-Bénard convection of a liquid metal,” *Physical Review E*, Vol. 83, No. 3, 036307 (2011)
- [19] 柳澤孝寿, “液体金属の熱対流実験に見られる自発的な流れ場の逆転 ([特集] 地球惑星科学における流体現象 1～地球内部編～),” *ながれ: 日本流体力学会誌*, Vol. 30, No. 4, pp. 299–304 (2011)
- [20] 井上真志, “液体金属熱対流実験の計算機シミュレーション,” 九州大学総合理工学府修士論文 (2010)
- [21] <http://www.jamstec.go.jp/es/jp/system/index.html>
- [22] Takeda Yasushi, “Instantaneous Velocity Profile Measurement by Ultrasonic Doppler Method,” *JSME international journal. Ser. B, Fluids and thermal engineering*, Vol. 38, No. 1 pp. 8–16 (1995)
- [23] Y. Tasaka, Y. Takeda and T. Yanagisawa, “Ultrasonic visualization of thermal convective motion in a liquid gallium layer,” Vol. 19, No. 3–4, pp. 131–137 (2008)

- [24] W. V. R. Malkus, “Discrete Transitions in Turbulent Convection,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 225, No. 1161, pp. 185–195 (1954)
- [25] R. Krishnamurti, “On the transition to turbulent convection. Part 1. The transition from two- to three-dimensional flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 42, pp. 295–307 (1970)
- [26] F. H. Busse, “Non-linear properties of thermal convection,” *Reports on Progress in Physics*, Vol. 41, pp. 1929–1967 (1978)
- [27] R. P. Kunnen, H. J. H. Clercx and B. J. Geurts, “Vortex statistics in turbulent rotating convection,” Vol. 82, No. 3, 036306 (2010)
- [28] W. E. Lorensen and H. E. Cline, “Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm,” *ACM Siggraph Computer Graphics*, Vol. 21, No. 4, pp. 163–169 (1987)
- [29] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, “Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing,” Second Edition, *Cambridge Press*, pp. 710–714 (1992)

謝辞

本研究に際して、熱心に指導して下さいました陰山聡教授に深く感謝致します。的確な助言や、分かりやすく詳しい考察を頂き、研究を最後まで進めることが出来ました。政田洋平助教には、研究の方針を決める際や論文をまとめる際に多大なアドバイスを頂き深く感謝致します。MHD流体のシミュレーションコードは九州大学理工学府の井上真志氏が開発されたものをベースに使わせて頂きました。また、海洋研究開発機構の柳澤孝寿博士、山岸保子博士には液体ガリウム実験の詳しい解説や、シミュレーションの結果についての貴重な洞察を頂き感謝致します。

A 渦識別値 Q_{3D} の導出

ここでは、本研究で用いた渦識別値 Q_{3D} の導出過程を示す。式 (15) において、歪み速度テンソル Ω と渦度テンソル S はそれぞれ、

$$\Omega_{ij} = \partial_i u_j - \partial_j u_i \quad (16)$$

$$S_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i \quad (i, j) = (1, 2, 3) \quad (17)$$

と表される。ここで、 u は速度で x 、 y 、 z 成分を持つ。一方、任意のテンソル A_{ij} に対するユークリッドノルムの二乗値は

$$\begin{aligned} \|A_{ij}\|^2 &= \text{Tr}(AA^T) \\ &= A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{31} + A_{32} + A_{33} \end{aligned} \quad (18)$$

と書けるので、

$$\begin{aligned} \|\Omega_{ij}\|^2 &= \Omega_{11} + \Omega_{12} + \Omega_{13} + \Omega_{21} + \Omega_{22} + \Omega_{23} + \Omega_{31} + \Omega_{32} + \Omega_{33} \\ &= 2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \|S_{ij}\|^2 &= S_{11} + S_{12} + S_{13} + S_{21} + S_{22} + S_{23} + S_{31} + S_{32} + S_{33} \\ &= 2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 \\ &\quad + 4 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (20)$$

となる。これより Q_{3D} を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} Q_{3D} &= \frac{1}{2} (\|\Omega_{ij}\|^2 - \|S_{ij}\|^2) \\ &= -2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \\ &\quad - 4 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - 4 \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) - 4 \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

本研究では $Q_{3D} > 0$ を満たす場所を、渦として判別する。

B パーティクルトレーサー

パーティクルトレーサーは、流れの速度場や磁場など、ベクトル場に対して一般的に適用できる可視化手法である。ここでは、GFVにおけるパーティクルトレーサーの計算手法についてを示す。

シミュレーション領域内に粒子の初期位置を設定すると、時間積分の計算が開始され、計算し終わった部分までリアルタイムに粒子の位置が描写される。粒子位置における速度場はB.1節で述べる線形補間により求める。時間積分にはB.2節で述べる4次精度ルンゲ=クッタ法を適用する。速度場はx、y、z方向の成分をそれぞれ持つベクトルであるので、各成分毎にルンゲ=クッタ法による積分を行う。

時間積分を行う関数は、描画などの他の処理が行われない時に呼び出される。時間積分の結果の粒子の位置はグローバルな表示用の配列に格納されるので、周期的に呼ばれているパーティクルトレーサーを表示する関数もすぐに1ステップ分の動きを反映させることができる。これにより時間経つにつれて粒子が動き、アニメーションとして粒子の軌跡を視認することが可能となる。

B.1 補間法

本研究で開発する可視化ソフトウェアが対象とするシミュレーションデータは、有限差分法で計算されたデータである。従って、シミュレーションデータは離散格子点上に定義されている。そのため、格子点上に位置しない点における値を求めるには、近傍の格子点から値を補間して求める必要がある。本研究では、3次元線形補間を採用した。

例として、あるスカラー場 ϕ に対する補間を考える。点 $\mathbb{X}(x,y,z)$ が、Fig. 28のように、8点の格子点に囲まれた直方体の内部に位置しているとする。この直方体は点 \mathbb{X} を通り、x、y、z軸に垂直な3つの平面によって8つの直方体に分割できる。こうして作られる8つの直方体の体積を、各格子点に対する重みとして利用する。ある格子点 $[i][j][k]$ における座標を (x_i, y_j, z_k) 、スカラー量を ϕ_{ijk} とする。 ϕ の値を補間して求める際、この格子点に対してかかる重み w_{ijk} を

$$w_{ijk} = f_i^x \times f_j^y \times f_k^z$$

と定義する。ここで、

$$\begin{aligned}
 f_i^x &= \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} \\
 f_{i+1}^x &= 1 - f_i^x \\
 f_j^y &= \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j} = \frac{y_{j+1} - y}{\Delta y} \\
 f_{j+1}^y &= 1 - f_j^y \\
 f_k^z &= \frac{z_{k+1} - z}{z_{k+1} - z_k} = \frac{z_{k+1} - z}{\Delta z} \\
 f_{k+1}^z &= 1 - f_k^z
 \end{aligned}$$

である。粒子から近い位置の格子点に対する重みが大きい。

以上の重みを使うと、Fig. 28において点Xにおける ϕ の補間値は、

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y, z) &= w_{000} \times \phi_{000} + w_{001} \times \phi_{001} \\
 &\quad + w_{010} \times \phi_{010} + w_{011} \times \phi_{011} \\
 &\quad + w_{100} \times \phi_{100} + w_{101} \times \phi_{101} \\
 &\quad + w_{110} \times \phi_{110} + w_{111} \times \phi_{111}
 \end{aligned}$$

と書ける。

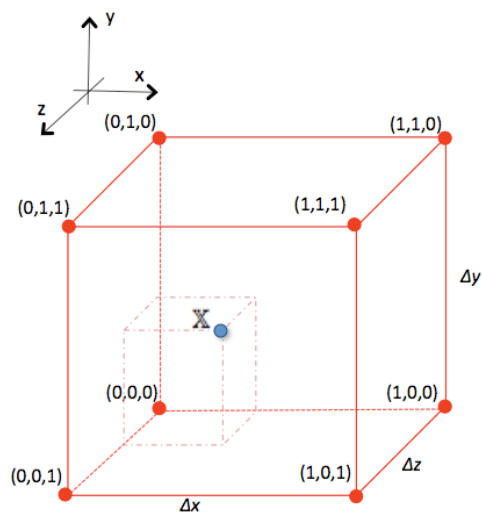


Fig. 28: Location of ϕ .

B.2 4次精度ルンゲ=クッタ法

数値積分法として、本可視化プログラムでは4次精度のルンゲ=クッタ法 [29] を採用した。ここでは4次精度のルンゲ=クッタ法について、簡単に説明する。例として、

$$\frac{dx}{dt} = v(x)$$

という常微分方程式を積分する問題を考える。

はじめの x 座標を x_n とし、1ステップ Δt だけ進んだ後の x 座標 x_{n+1} を4次精度ルンゲ=クッタ法を用いて求めるアルゴリズムは以下の通りである。

$$\begin{aligned}x_0 &= x_n, \\k_1 &= \Delta t v(x_0), \\k_2 &= \Delta t v\left(x_0 + \frac{k_1}{2}\right), \\k_3 &= \Delta t v\left(x_0 + \frac{k_2}{2}\right), \\k_4 &= \Delta t v(x_0 + k_3), \\x_{n+1} &= x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

3次元の方程式を解く場合、例えば

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= v_y(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= v_z(x, y, z)\end{aligned}$$

という問題に対しては、以下のような手順をとる。

$$x_0 = x_n, y_0 = y_n, z_0 = z_n$$

とすると、

$$k_1^x = \Delta t v_x(x_0, y_0, z_0)$$

$$k_1^y = \Delta t v_y(x_0, y_0, z_0)$$

$$k_1^z = \Delta t v_z(x_0, y_0, z_0)$$

$$k_2^x = \Delta t v_x\left(x_0 + \frac{k_1^x}{2}, y_0 + \frac{k_1^y}{2}, z_0 + \frac{k_1^z}{2}\right)$$

$$k_2^y = \Delta t v_y\left(x_0 + \frac{k_1^x}{2}, y_0 + \frac{k_1^y}{2}, z_0 + \frac{k_1^z}{2}\right)$$

$$k_2^z = \Delta t v_z\left(x_0 + \frac{k_1^x}{2}, y_0 + \frac{k_1^y}{2}, z_0 + \frac{k_1^z}{2}\right)$$

$$k_3^x = \Delta t v_x\left(x_0 + \frac{k_2^x}{2}, y_0 + \frac{k_2^y}{2}, z_0 + \frac{k_2^z}{2}\right)$$

$$k_3^y = \Delta t v_y\left(x_0 + \frac{k_2^x}{2}, y_0 + \frac{k_2^y}{2}, z_0 + \frac{k_2^z}{2}\right)$$

$$k_3^z = \Delta t v_z\left(x_0 + \frac{k_2^x}{2}, y_0 + \frac{k_2^y}{2}, z_0 + \frac{k_2^z}{2}\right)$$

$$k_4^x = \Delta t v_x(x_0 + k_3^x, y_0 + k_3^y, z_0 + k_3^z)$$

$$k_4^y = \Delta t v_y(x_0 + k_3^x, y_0 + k_3^y, z_0 + k_3^z)$$

$$k_4^z = \Delta t v_z(x_0 + k_3^x, y_0 + k_3^y, z_0 + k_3^z)$$

$$x_{n+1} = x_0 + \frac{1}{6}(k_1^x + 2k_2^x + 2k_3^x + k_4^x)$$

$$y_{n+1} = y_0 + \frac{1}{6}(k_1^y + 2k_2^y + 2k_3^y + k_4^y)$$

$$z_{n+1} = z_0 + \frac{1}{6}(k_1^z + 2k_2^z + 2k_3^z + k_4^z)$$

となる。