紹介論文

The degree of knottedness of tangled vortex lines

By H.K.MOFFATT

Received 17 May 1968
J.Fluid Mech.(1969), vol.35,part 1, pp. 117-129
Printed in Great Britain

素粒子宇宙理論研究室セミナー　2014/07/04

M1　中村俊介

発表の流れ

流体力学の「ヘリシティー」について取り扱う

1. ヘリシティーはトポロジカルな物理量である事の説明
2. ヘリシティーは非粘性で Barotolopic 流体ならば保存量である事の説明
3. ヘリシティーの不変性
4. ヘリシティーについて、流体力学と電磁気学
5. ヘリシティーの計算:具体例

はじめに

流体力学におけるヘリシティーとは？

$$I \equiv \int_V \vec{u} \cdot \vec{\omega} \, dV$$

という体積積分で表される物理量。

但し、

$$\vec{u}(x, y, z, t) \quad ： \text{速度場}$$

$$\vec{\omega}(x, y, z, t) \equiv \nabla \times \vec{u} \quad ： \text{渦度}$$

ヘリシティーはトポロジカルな物理量 (1/5)

以下の量を「循環」という。

ある閉曲線Cに対して、$K \equiv \oint_c \vec{u} \cdot d\vec{l}$

循環に対してストークスの定理を用いると、

$$K = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$$

となる。

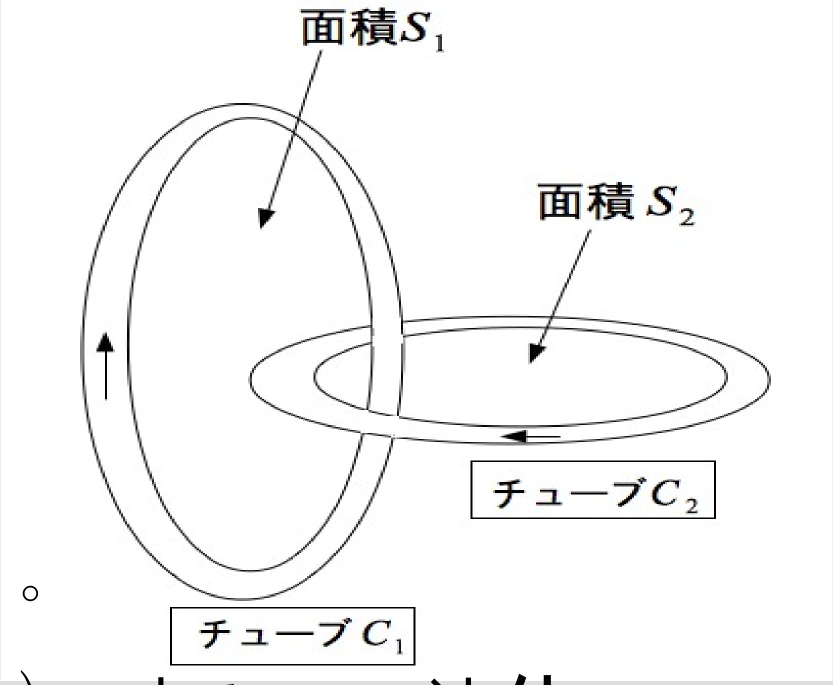
ヘリシティーはトポロジカルな物理量 (2/5)

もし今、渦度$\vec{\omega}$が、渦管の内部を除いて0であるような場ならば、

$$K_1=\int_{C_1}\vec{u}\cdot d\vec{l}=\int_{S_1}\vec{\omega}\cdot d\vec{S}=\begin{cases}0\leftarrow C_1\text{と}C_2\text{が絡まっていない}\\ \pm\kappa_2\leftarrow C_1\text{と}C_2\text{が一回絡まっている}\end{cases}$$

κ_2 $\cdots$ 渦管C_2の強さ

> ~ *Kelvin*の循環定理 ~
> 非粘性*Barotoropic*流体では
> 循環は保存量である。



また上の考察より、
トポロジカルな量であるとも言える。

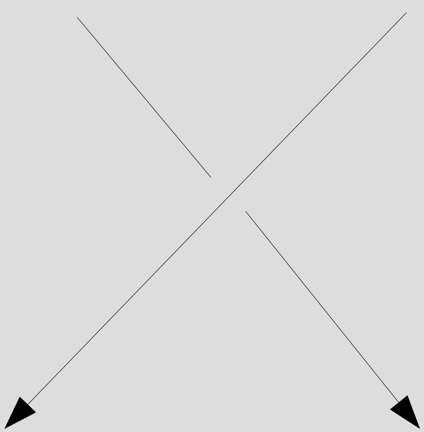
*Barotoropic*流体 $\cdots\cdots \rho=f(p)$で表される流体のこと。

ヘリシティーはトポロジカルな物理量 (3/5)

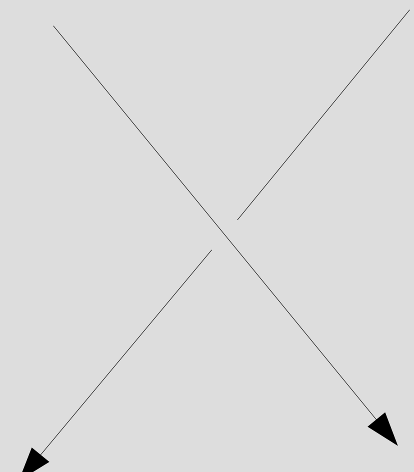
Gaussの絡み数の定義

$$Lk: K^2 \mapsto \mathbb{Z}$$

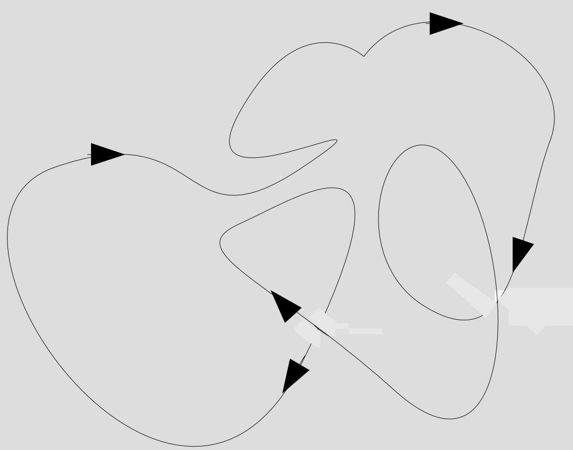
2つの向きづけされた結び目（輪っか）からなる絡み目に対し、正の交差点数から負の交差点数を引いて2で割った数。但し、自己の交差は考えない。



正の交差点



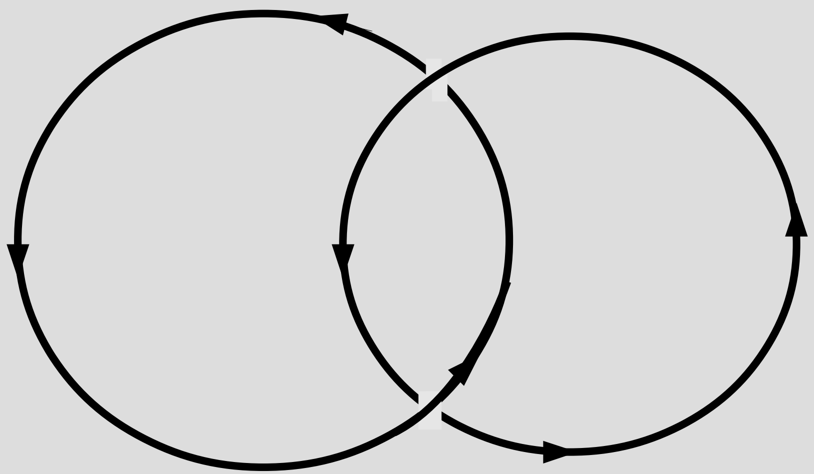
負の交差点



絡み数は0

ヘリシティーはトポロジカルな物理量 (4/5)

例.共に反時計回りの向きづけのホップリンクK



Gaussの絡み数をLkと書くことにするとLk(K)=(-1+(-1))×1/2= -1

ヘリシティーはトポロジカルな物理量 (5/5)

一般の絡まり方に対して

α_{12}を閉曲線C_1とC_2の$Gauss$の絡み数とすると

$$K_1 = \oint_{c_1} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \alpha_{12} \kappa_2$$

今、このK_1にκ_1をかけると、$\vec{\omega}$と$d\vec{l}$は平行なので、

$$\kappa_1 K_1 = \alpha_{12} \kappa_1 \kappa_2 = \oint_{c_1} \kappa_1 \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_V \vec{u} \cdot \vec{\omega}\, dV$$

この量をヘリシティーという。
上の式はα_{12}を含むことからも分かるように、
ヘリシティーもまたトポロジカルな物理量である。

非粘性barotolopic流体でのヘリシティー保存(1/3)

オイラー方程式(非粘性流体の運動方程式)

$$\frac{D\vec{u}}{Dt}=\frac{-1}{\rho(x,y,z,t)}\vec{\nabla}\,p(x,y,z,t)+K(x,\vec{y},z,t)$$

Barotolopic流体,保存力下

$$\boxed{\frac{D\vec{u}}{Dt}=-\vec{\nabla}\left(h(x,y,z,t)+\Omega(x,y,z,t)\right)}\qquad(1)$$

非粘性*barotolopic*流体の渦度方程式

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right)=\frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{u}\qquad(2)}$$

非粘性barotolopic流体でのヘリシティー保存(2/3)

ヘリシティー保存

$$\frac{dI}{dt}=\frac{d}{dt}\int_V \vec{u}\cdot\vec{\omega}\,dV=\int_V\left(\frac{D}{Dt}\left(\vec{u}\cdot\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right)\right)\rho\,dV$$

$$=\int_V\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)\vec{\omega}\,dV+\int_V\vec{u}\left(\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right)\right)\rho\,dV$$

方程式(1),(2)

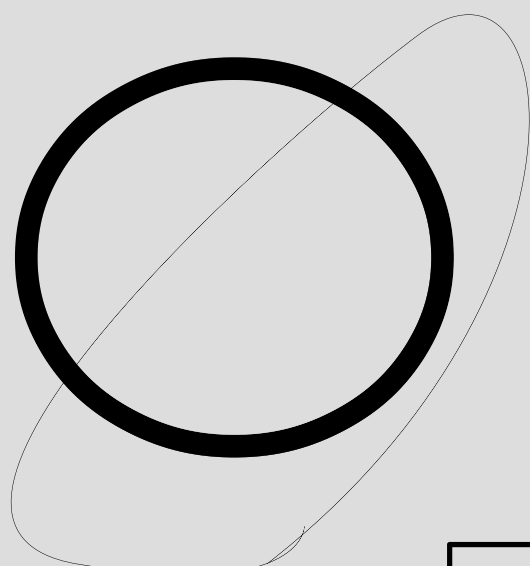
$$=\int_V\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\vec{u}^2-h-\Omega\right)dV$$

$$=\int_S\vec{n}\cdot\vec{\omega}\left(\frac{1}{2}\vec{u}^2-h-\Omega\right)dS$$

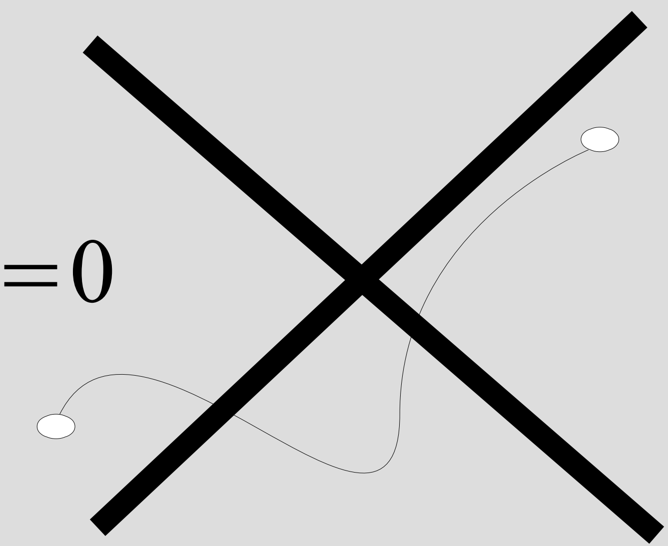
もしS上で$\vec{n}\cdot\vec{\omega}=0$ならば、ヘリシティーは保存することが示された。

非粘性barotolopic流体でのヘリシティー保存(3/3)

直観的にはヘリシティーがトポロジカルな物理量であることと、$\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}=0$ より、結び目が解けないことが保存の理由。



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}=0$$



渦度場は閉じている → ほどけない

ヘリシティーの不変性

$$\vec{u}(x,y,z,t) \quad \rightarrow \quad \vec{u}(x,y,z,t)+\vec{\nabla}\phi(x,y,z,t)$$

の置き換えの下でヘリシティーは不変

$$I=\int_V (\vec{u}+\underline{\underline{\vec{\nabla}\phi}})\cdot\vec{\omega}\,dV$$

$$I=\int_V \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\omega}\,dV=\int_V \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\omega})\,dV$$

$$=\int_S \phi\vec{n}\cdot\vec{\omega}\,dS=0$$

閉曲面S上にて、$\vec{n}\cdot\vec{\omega}=0$とした。

流体力学と電磁気学

対応関係

$$\vec{u} \quad \rightarrow \quad \vec{A}$$

$$\vec{\omega} \quad \rightarrow \quad \vec{B}$$

$$I \equiv \int_V \vec{A} \cdot \vec{B}\, dV$$

「渦管」などは「磁束管」へ

先の不変性は「ゲージ不変性」に対応

ヘリシティーの具体例

関数 $\psi=\psi(x,y,t)$ ， $\xi=\xi(x,y,t)$ によって表される速度場

$$\vec{u}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},-\frac{\partial\psi}{\partial x},\xi\right)$$

$\vec{u}\cdot\vec{\omega}=\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\xi-\xi\vec{\nabla}^2\psi$ と計算されて、

$$I=\iiint_{V_0}\vec{u}\cdot\vec{\omega}\,dV=\iint_{-\infty}^{\infty}\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\xi-\xi\vec{\nabla}^2\psi\,dxdy\times\int_0^1 dz$$
$$=-2\iint_{-\infty}^{\infty}\xi\vec{\nabla}^2\psi\,dxdy$$

例 ： 渦度場が直線なら $\vec{\nabla}^2\psi=-\omega_0$ と与えることが出来る。

まとめ

ヘリシティー $I \equiv \int_V \vec{u} \cdot \vec{\omega}\, dV$ は

- トポロジカルな性質を持つ。
- ヘリシティーは非粘性barotolopic流体ならば保存量である。
- ヘリシティーは不変性を持つ。
- ヘリシティーは流体力学だけでなく、電磁気学でも同様に用いることが出来る。

主な参考文献

- 今井功 (1973) 『流体力学 (前編) 』 裳華房(物理学選書)
- 今井功 (1970)『流体力学』岩波書店(物理テキストシリーズ)
- 木田重雄 (2003)『なっとくする流体力学』講談社
- Takahiro IWAYAMA's Homepage <http://www2.kobe-u.ac.jp/~iwayama/> (2014年6,7月アクセス)

ヘリシティー保存からの簡単な帰結の例

非粘性非圧縮性流体に対して、

$$I=\int_V \vec{u}\cdot\vec{\omega}\,dV \quad \text{は保存量。}$$

$$E=\frac{2T}{\rho}=\int_V \vec{u}\cdot\vec{u}\,dV \quad \text{は保存量。}$$

$$\Omega(t)=\int_V \vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\,dV$$

シュワルツの不等式より、

任意の時刻に対して、$\Omega \geqslant \frac{I^2}{E}$が成り立つことが分かる。