Lovelock重力理論の因果性と双曲性

棚橋　典大　(Kavli IPMU/DAMTP)

with Harvey S. Reall, Benson Way

Based on arXiv:1406.3379 & work in progress

Lovelock重力理論の因果性と双曲性

- Lovelock重力理論
  = 一般相対論 + (曲率テンソルの積による補正)

  ➢ 運動方程式が二回微分まで→ ゴースト不安定性なし
  ➢ ストリング理論から出てくる？

- GR: 重力摂動は光と同じ速さで伝搬
- Lovelock: 超光速/亜光速で伝搬することがある

Lovelock理論は因果律を満たすか？
運動方程式は双曲的か？

Lovelock重力理論の因果性と双曲性

- Lovelock理論は因果律を満たすか？
  - この理論では普通の因果構造が実現されるか？
  - 重力摂動がブラックホール内部から出てくるようなことはあるか？

- 運動方程式は双曲的か？
  - 双曲的な運動方程式 ＝ 波動方程式
  - 方程式の2階微分項の係数で決まる
  - ➢ GR: 運動方程式が双曲型になると保証されている
  - ➢ Lovelock: 背景時空によっては双曲型でなくなる？

Contents

1. Introduction
   - Lovelock重力理論
   - 特性曲面
   - 双曲性
2. Questions
   - 重力摂動はブラックホールから出てくるか？
   - 平面波解上の伝搬
   - ブラックホール周辺における伝搬
3. Summary

Contents

1. Introduction
   – Lovelock重力理論
   – 特性曲面
   – 双曲性
2. Questions
   – 重力摂動はブラックホールから出てくるか？
   – 平面波解上の伝搬
   – ブラックホール周辺における伝搬
3. Summary

Introduction: Lovelock重力理論

- d 次元におけるLovelock重力理論　($p \leq (d-1)/2$)

$$\mathcal{L} = R - 2\Lambda - \sum_{p\geq 2} 2k_p \delta^{c_1 \ldots c_{2p}}_{d_1 \ldots d_{2p}} R_{c_1 c_2}{}^{d_1 d_2} \ldots R_{c_{2p-1} c_{2p}}{}^{d_{2p-1} d_{2p}}$$

$$= R - 2\Lambda - 8k_2 \left(R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}\right) + \cdots$$

$$\left(\delta^{c_1 \ldots c_n}_{d_1 \ldots d_n} \equiv n! \delta^{c_1}_{[d_1} \ldots \delta^{c_n}_{d_n]}\right)$$

- EoM = Einstein eq. + 補正項

$$0 = A^a{}_b \equiv G^a{}_b + \Lambda \delta^a{}_b + B^a{}_b$$

where

$$B^a{}_b = \sum_{p\geq 2} k_p \delta^{a c_1 \ldots c_{2p}}_{b d_1 \ldots d_{2p}} R_{c_1 c_2}{}^{d_1 d_2} \ldots R_{c_{2p-1} c_{2p}}{}^{d_{2p-1} d_{2p}}$$

Introduction: 特性曲面

- 重力波信号の伝搬

特性曲面上を伝搬する

スカラー場 ψ のEoM: $0 = E(\psi, \partial\psi, \partial^2\psi)$

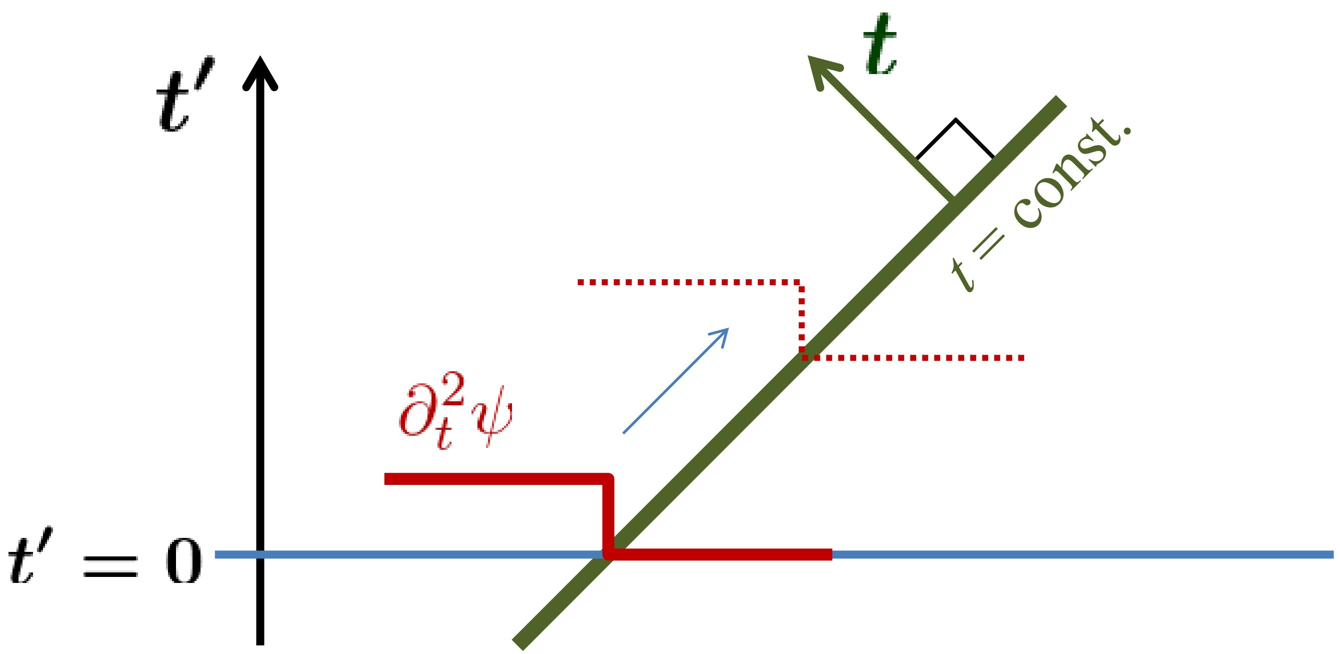
$$= \frac{\partial E}{\partial(\partial_t^2\psi)}\partial_t^2\psi + F(\partial_t\psi,\, \psi)$$

- $\dfrac{\partial E}{\partial(\partial_t^2\psi)} \neq 0$: $\partial_t^2\psi$ が一意に決まる
  → ψの時間発展が普通に求まる
- $\dfrac{\partial E}{\partial(\partial_t^2\psi)} = 0$: $\partial_t^2\psi$ が一意に決まらない
  → t = const. が特性曲面になっている

Introduction: 特性曲面

- $\dfrac{\partial E}{\partial(\partial_t^2\psi)} = 0$　$\partial_t^2\psi$ が一意に決まらない
  → t = const. が特性曲面になっている

✓初期面上の信号は特性曲面に沿って伝搬する

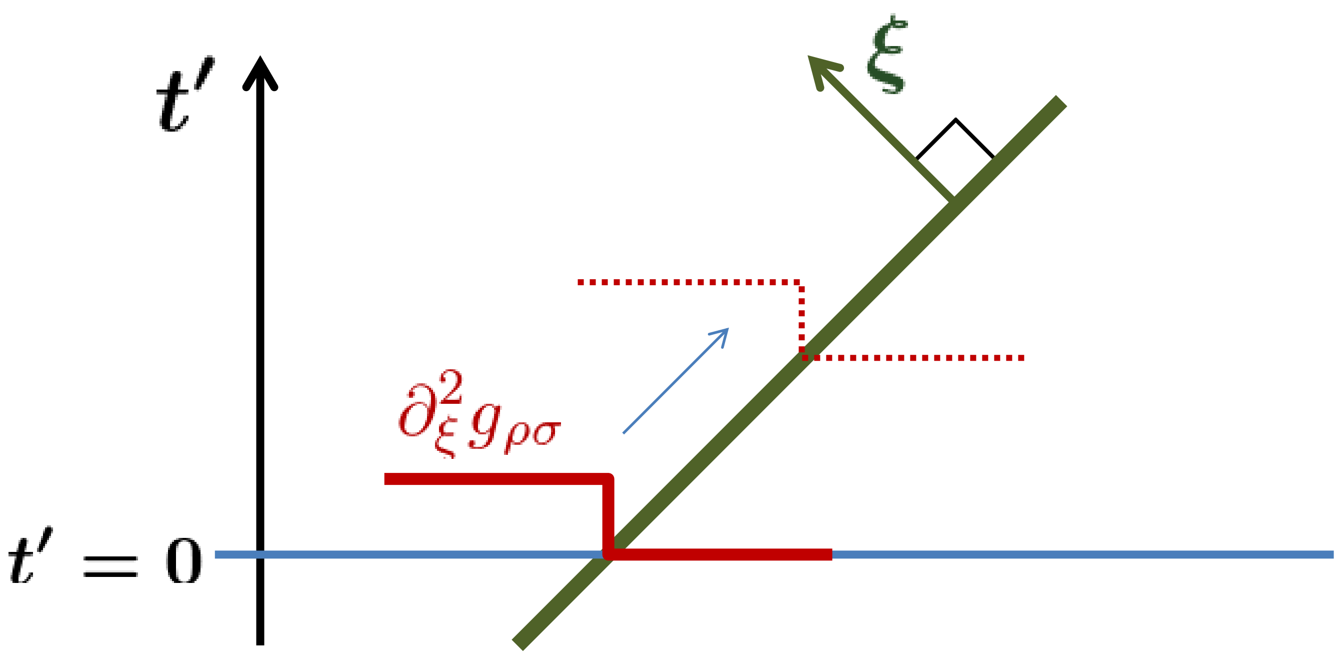


Introduction: 特性曲面

- Lovelock理論における特性曲面 [Aragone '87] [Choquet-Bruhat'88]

$$E_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{2\Lambda}{d-2} g_{ab} + B_{ab} - \frac{1}{d-2} B^c{}_c g_{ab} = 0$$

$$P(x,\xi)_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \equiv \frac{\delta E_{\mu\nu}}{\delta(\partial_t^2 g_{\rho\sigma})} = \frac{\delta E_{\mu\nu}}{\delta(\partial_\alpha \partial_\beta g_{\rho\sigma})} \xi_\alpha \xi_\beta$$



Introduction: 特性曲面

- Lovelock理論における特性曲面 [Aragone '87] [Choquet-Bruhat'88]

$$E_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{2\Lambda}{d-2} g_{ab} + B_{ab} - \frac{1}{d-2} B^c{}_c g_{ab} = 0$$

$$P(x,\xi)_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \equiv \frac{\delta E_{\mu\nu}}{\delta(\partial_t^2 g_{\rho\sigma})} = \frac{\delta E_{\mu\nu}}{\delta(\partial_\alpha \partial_\beta g_{\rho\sigma})} \xi_\alpha \xi_\beta$$

✓ 特性曲面 ⇔ $\det P = 0$

✓ $(P \cdot t)_{ab} = (P_{GR} \cdot t)_{ab} + (\mathcal{R} \cdot t)_{ab}$ (t_{ab}: 対称テンソル)

$$(P_{GR} \cdot t)_{ab} = -\frac{1}{2}\xi^2 t_{ab} + \xi^c \xi_{(a} t_{b)c} - \frac{1}{2}\xi_a \xi_b t^c{}_c$$

$$(\mathcal{R} \cdot t)^a{}_b = -\sum_{p\geq 2} 2p k_p \delta^{ac_1\ldots c_{2p}}_{bd_1\ldots d_{2p}} \xi_{c_1} \xi^{d_1} t_{c_2}{}^{d_2} R_{c_3c_4}{}^{d_3d_4} \ldots R_{c_{2p-1}c_{2p}}{}^{d_{2p-1}d_{2p}}$$
$$+ \frac{1}{d-2}\delta^a_b \sum_{p\geq 2} 2p k_p \delta^{ec_1\ldots c_{2p}}_{ed_1\ldots d_{2p}} \xi_{c_1} \xi^{d_1} t_{c_2}{}^{d_2} R_{c_3c_4}{}^{d_3d_4} \ldots R_{c_{2p-1}c_{2p}}{}^{d_{2p-1}d_{2p}}$$

Introduction: 特性曲面

- GRにおける特性曲面

$$\det P = 0 \Rightarrow (P_{GR}\cdot t)_{ab} = -\frac{1}{2}\xi^2 t_{ab} + \xi^c \xi_{(a} t_{b)c} - \frac{1}{2}\xi_a \xi_b t^c{}_c = 0$$

✓ ゲージモード: $(P\cdot t)$ はt_{ab}を次のように変換しても不変

$$t_{ab} \to t_{ab} + \xi_{(a} X_{b)} \qquad (X_a : \text{任意のベクトル})$$

➢ $\xi^2 \neq 0$ → $t_{ab} = \xi_{(a} X_{b)}$ for some X_a → ゲージモード $\times\, d$

➢ $\xi^2 = 0$ → $\xi^c \xi_{(a} t_{b)c} - \frac{1}{2}\xi_a \xi_b t^c{}_c = 0$

→ $\xi^b t_{ab} - \frac{1}{2}\xi_a t^c{}_c = 0$ → 拘束条件 $\times\, d$

∴ 物理的なモードは $\xi^2 = 0$で $\frac{1}{2}d(d+1) - d - d = \frac{1}{2}d(d-3)$ 個存在する

Introduction: 特性曲面

- Lovelock理論における特性曲面 [Aragone '87] [Choquet-Bruhat'88]

$$\det P = 0 \Rightarrow (P\cdot t)_{ab} = (P_{GR}\cdot t)_{ab} + (\mathcal{R}\cdot t)_{ab} = 0$$

➢ $\xi^2 \neq 0$ → t_{ab} をゲージ部分とそれ以外に分解できる:

$$t_{ab} = \hat{t}_{ab} + \xi_{(a}X_{b)} \quad \left(\xi^b \hat{t}_{ab} - \frac{1}{2}\xi_a \hat{t}^c{}_c = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\xi^2 \hat{t} = \mathcal{R}(x,\xi)\cdot\hat{t}$$

➢ $\xi^2 = 0$ → ヌル方向に合わせた座標を取る $\left(\xi_0 = 0 = \xi_i,\ \xi_1 = 1 \right)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t_{00} + (\mathcal{R}\cdot t)_{01} = 0 & \frac{1}{2}t_{0i} + (\mathcal{R}\cdot t)_{1i} = 0 \\ (\mathcal{R}\cdot t)_{ij} = 0 & -\frac{1}{2}t_{ii} + (\mathcal{R}\cdot t)_{11} = 0 \end{cases}$$

Introduction: 双曲性

- 双曲性

  = "初期値問題が*well-posed*"

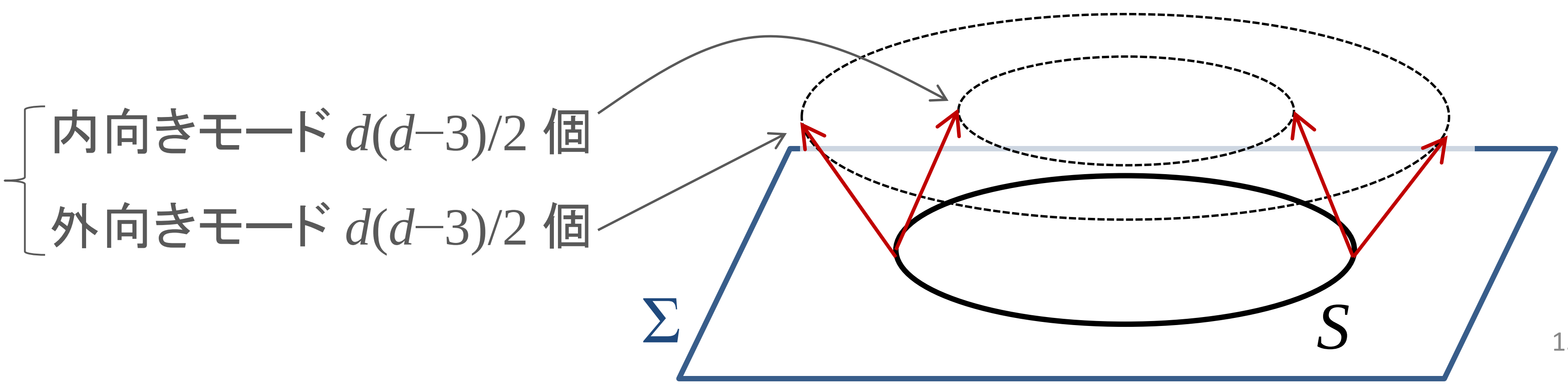
  = "よい性質の初期値に対して、時間発展が一意に決まる"

  "初期値を連続的に変化 → 解も連続的に変化"

  = Σ: 初期時刻面 ($d-1$次元)

  "Σ上の($d-2$)次元面 S に波源を置くとする

  → Sから出る特性曲面が$d(d-3)$ 個存在する"



Contents

1. Introduction
   – Lovelock重力理論
   – 特性曲面
   – 双曲性
2. Questions
   – 重力摂動はブラックホールから出てくるか？
   – 平面波解上の伝搬
   – ブラックホール周辺における伝搬
3. Summary

Contents

1. Introduction
   – Lovelock重力理論
   – 特性曲面
   – 双曲性
2. Questions
   – 重力摂動はブラックホールから出てくるか？
   – 平面波解上の伝搬
   – ブラックホール周辺における伝搬
3. Summary

Questions

1. 重力摂動はブラックホールから出てくるか？

2. 平面波解上の伝搬
3. ブラックホール周辺における伝搬

- 因果律に従うか？
- 運動方程式の双曲性は保たれるか？

Summary

◆Lovelock重力理論における特性曲面

1. 重力摂動はブラックホールから出てくるか？

→ No: Killingホライズン＝特性曲面となっている

2. リッチ平坦N型解上の伝搬

✓ 特性曲面 ＝ effective metricについてnullな面

✓ 一番大きいconeに基づいて因果関係を定義できる

3. ブラックホール周辺における伝搬

✓ 特性曲面 ＝ effective metricについてnullな面

✓ 小さなBH解周辺では双曲性が破れる

?: 一般的な状況で、時間発展の最中に双曲性が破れることはあるか？

?: 非線形重力波の伝搬と衝撃波形成について

1. “重力摂動はブラックホールから出てくるか？”

⇔ “BH地平面は特性曲面になっているか？”

≈ “Killing地平面は特性曲面になっているか？”

- ✓ GR: 特性曲面は常にnull
  → Killing地平面は特性曲面になっている
- ✓ GR + Gauss-Bonnet項による補正:
  → Killing地平面は特性曲面になると示せる [Izumi ‘14]
- ✓ Lovelock: ？

1. “重力摂動はブラックホールから出てくるか？”

$\Leftrightarrow$ “BH地平面は特性曲面になっているか？”

$\approx$ “Killing地平面は特性曲面になっているか？”

- Killing地平面 $\Rightarrow$ null座標で $R_{0i0j} = R_{0ijk} = 0$ となる
- $\xi^2=0$ と仮定して、解の個数をカウントする

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t_{00} + (\mathcal{R}\cdot t)_{01} = 0 & \frac{1}{2}t_{0i} + (\mathcal{R}\cdot t)_{1i} = 0 \\ (\mathcal{R}\cdot t)_{ij} = 0 & -\frac{1}{2}t_{ii} + (\mathcal{R}\cdot t)_{11} = 0 \end{cases}$$

✓仮に$t_{00} = t_{0i} = 0$と仮定 $\Rightarrow$ $-\frac{1}{2}t_{ii} + (\mathcal{R}\cdot t)_{11} = 0$ 以外は全部消える

$\therefore \quad \frac{1}{2}d(d+1) - d - (1+d-2) - 1 = \boxed{\frac{1}{2}d(d-3)\text{ 個}}$ の解が存在

$\therefore$ 全モードについてKilling地平面は特性曲面になっている。

2.平面波解上の伝搬

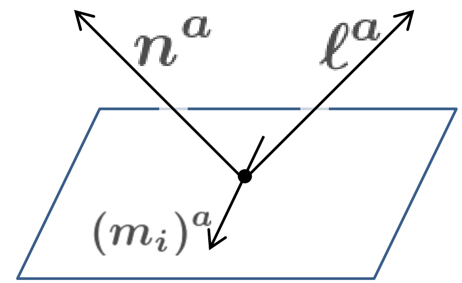
より一般的に、背景時空が

リッチ平坦なN型解

の場合を考える。

- Null基底

$$
\begin{cases}
(e_0)^a = \ell^a \\
(e_1)^a = n^a \\
(e_i)^a = m^a
\end{cases}
\qquad
\left(
\begin{array}{c}
\ell\cdot\ell = 0 = n\cdot n \\
\ell\cdot n = 1
\end{array}
\right)
$$



- リッチ平坦なN型解:

Riemannテンソルが、次の成分以外全部ゼロ:

$$R_{1i1j} \equiv \Omega_{ij}$$

対称・トレースレス

2.平面波解上の伝搬

- リッチ平坦なN型解:

  Riemannテンソルが、次の成分以外全部ゼロ:

$$R_{1i1j} \equiv \Omega_{ij}$$

対称・トレースレス

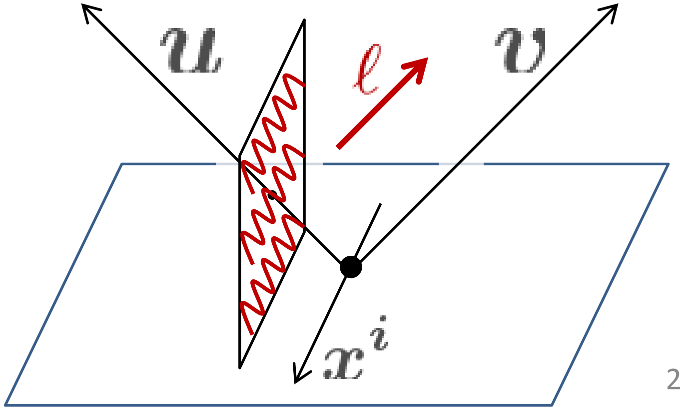
✓ $\Lambda = 0$のLovelock理論の解になっている

✓ 例: 平面波解 [Boulware-Deser '85]

$$ds^2 = a_{ij}(u)x^i x^j du^2 + 2dudv + \delta_{ij}dx^i dx^j$$

$a_{ij}(u)$: 対称・トレースレス

$$(e_0)^a = \ell^a = (\partial/\partial v)^a$$



2.平面波解上の伝搬

- リッチ平坦なN型解:

  Riemannテンソルが、次の成分以外全部ゼロ:

$$R_{1i1j} \equiv \Omega_{ij}$$

対称・トレースレス

✓ $\Lambda = 0$のLovelock理論の解になっている

✓ 例: 平面波解 [Boulware-Deser '85]

$$ds^2 = a_{ij}(u) x^i x^j du^2 + 2du dv + \delta_{ij} dx^i dx^j$$

➢ a_{ij}が定数なら $R_{1i1j} \propto a_{ij}$ となる

2.リッチ平坦N型解上の伝搬

示すこと:

特性曲面 ＝ “effective metrics”についてnullな面

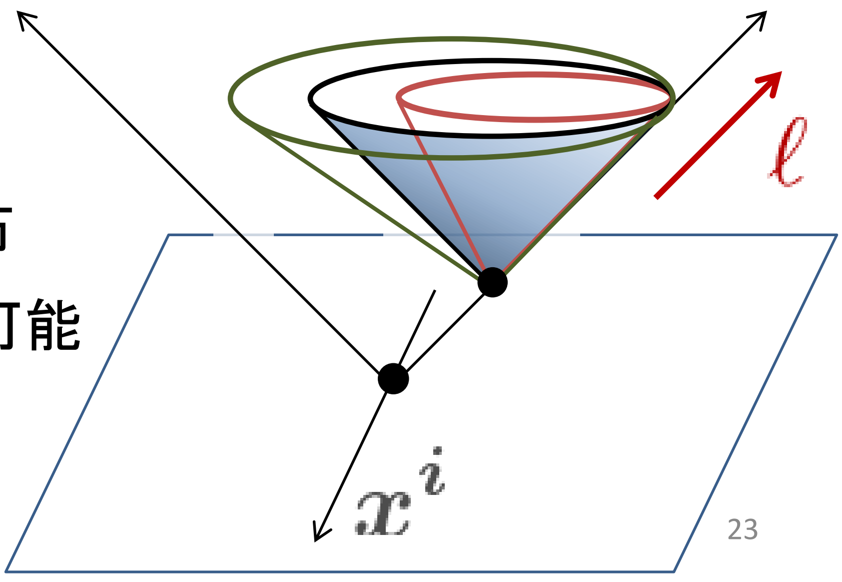
$$G_I^{ab} = g^{ab} + \omega_I \ell^a \ell^b \quad (I = 1, \ldots, d(d-3)/2)$$

✓ ω_I : Ω_{ij}の関数

✓ ℓ : G_Iに対してnull
⇒ 特性曲面はℓ に接する

✓ 特性曲面のconeが入れ子状に分布

✓ 最大のconeを用いて因果関係を定義可能



2.リッチ平坦N型解上の伝搬

示すこと:

特性曲面 ＝ “effective metrics”についてnullな面

$$G_I^{ab} = g^{ab} + \omega_I \ell^a \ell^b \quad (I = 1, \ldots, d(d-3)/2)$$

Key points:

- $(\mathcal{R}\cdot t)^\mu{}_\nu$ が簡単化する:

$$(\mathcal{R}\cdot t)^\mu{}_\nu = 16k_2 \left(-\delta^{\mu\rho_1\rho_2 1i}_{\nu\sigma_1\sigma_2 0j} \xi_{\rho_1} \xi^{\sigma_1} t_{\rho_2}{}^{\sigma_2} \Omega_{ij} + \frac{1}{d-2} \delta^\mu_\nu \delta^{k\rho_1\rho_2 1i}_{k\sigma_1\sigma_2 0j} \xi_{\rho_1} \xi^{\sigma_1} t_{\rho_2}{}^{\sigma_2} \Omega_{ij} \right)$$

- $\xi^2 \neq 0$ の場合の特性曲面は $\frac{1}{2}\xi^2 \hat{t} = \mathcal{R}(x,\xi)\cdot\hat{t}$ で決まる

$\Rightarrow$ 固有値方程式 $\mathcal{R}(x,\xi)\cdot\hat{t} = T^{ab}\xi_a\xi_b\,\hat{t}$ からeff. metricが得られる

$$0 = \xi^2 - T^{ab}\xi_a\xi_b = \left(g^{ab} - T^{ab}\right)\xi_a\xi_b$$

2.リッチ平坦N型解上の伝搬

- $\mathcal{R}(x,\xi)\cdot t$の 固有値方程式

  - ゲージモード: $t_{ab}=\xi_{(a}X_{b)}$
  - ゼロ固有値のモード: $\begin{cases} t_{ab}=\ell_{(a}X_{b)} \\ t_{ij}=\hat{t}_{ij}+\alpha\delta_{ij}, \quad t_{0\mu}=0=t_{1\mu} \end{cases}$
  - 非ゼロ固有値のモード:

$$t_{ab}=2t_{01}\ell_{(a}n_{b)}+t_{ij}m_{ia}m_{ib} \qquad (t_{ii}=0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathcal{R}\cdot t)_{01}=\dfrac{16k_2(d-4)}{d-2}\left(\dfrac{1}{2}t_{01}\xi^i\xi^j+\xi_0^2t^{ij}\right)\Omega_{ij} \\ (\mathcal{R}\cdot t)_{ij}=16k_2\,\xi_0^2\,\mathcal{O}(t)_{ij} \end{cases}$$

$$\left(\mathcal{O}(t)_{ij}=t_{ik}\Omega_{kj}+t_{jk}\Omega_{ki}-\frac{2}{d-2}t_{kl}\Omega_{kl}\delta_{ij}\right)$$

2.リッチ平坦N型解上の伝搬

• $\mathcal{R}(x,\xi)\cdot t$ の 固有値方程式

$$\mathcal{O}(t)_{ij} = \nu_I\, t_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathcal{R}\cdot t)_{ij} = -\frac{1}{2}\xi_0^2\, \omega_I\, t_{ij}$$

$$(I = 1, \ldots, d(d-3)/2) \qquad\qquad (\omega_I = -32 k_2 \nu_I)$$

➢非ゼロ固有値のモード:

$$t_{ab} = 2t_{01}\ell_{(a}n_{b)} + t_{ij}m_{ia}m_{ib} \qquad (t_{ii} = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathcal{R}\cdot t)_{01} = \dfrac{16k_2(d-4)}{d-2}\left(\dfrac{1}{2}t_{01}\xi^i\xi^j + \xi_0^2 t^{ij}\right)\Omega_{ij} \\ (\mathcal{R}\cdot t)_{ij} = 16k_2\, \xi_0^2\, \mathcal{O}(t)_{ij} \end{cases}$$

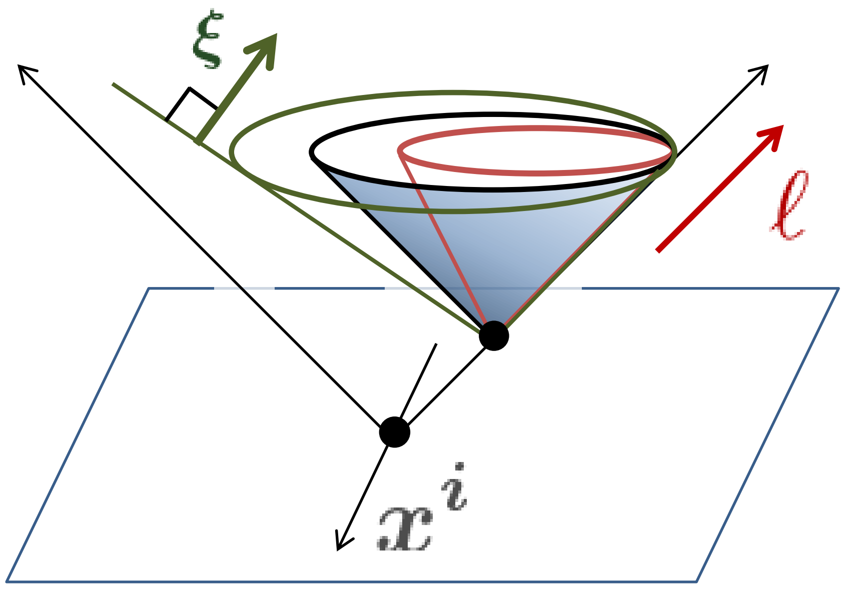
$$\left(\mathcal{O}(t)_{ij} = t_{ik}\Omega_{kj} + t_{jk}\Omega_{ki} - \frac{2}{d-2}t_{kl}\Omega_{kl}\delta_{ij}\right)$$

2.リッチ平坦N型解上の伝搬

- $\xi^2 \neq 0$ の場合の特性曲面は $\frac{1}{2}\xi^2 \hat{t} = \mathcal{R}(x,\xi)\cdot\hat{t}$ で決まる
- $(\mathcal{R}\cdot t)_{ij} = -\frac{1}{2}\xi_0^2\ \omega_I\ t_{ij}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \xi^2 + \omega_I \xi_0^2 = (g^{ab} + \omega_I \ell^a \ell^b)\xi_a \xi_b$$

$$\equiv G_I^{ab}\xi_a\xi_b \qquad (I = 1, \ldots, d(d-3)/2)$$



3.ブラックホール周辺における伝搬

- 静的ブラックホール解

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Sigma^2$$

➢ Σ : (*d*−2)次元の定曲率空間　(*κ* = +1, 0, −1)

➢ $f(r) = \kappa - r^2\psi(r)$

➢*ψ*(*r*) は次の代数方程式の解:

$$W[\psi] \equiv -\sum_{p\geq 2}\left[2^{p+1}k_p\left(\prod_{k=1}^{2p-2}(d-2-k)\right)\psi^p\right] + \psi - \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)} = \frac{\mu}{r^{d-1}}$$

3.ブラックホール周辺における伝搬

- 静的ブラックホール解

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Sigma^2$$

- 正規直交基底

$$\begin{cases} e_0 = -f^{1/2}dt \\ e_1 = f^{-1/2}dr \\ e_i = \end{cases}$$

$e_i =$ ($d\Sigma^2$について正規直交)

-
$$\begin{cases} R_{IJKL} = R_1(r)\left(\eta_{IK}\eta_{JL} - \eta_{IL}\eta_{JK}\right) \\ R_{IiJj} = R_2(r)\ \eta_{IJ}\delta_{ij} \\ R_{ijkl} = R_3(r)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) \end{cases}$$

η_{IJ} : 2次元 Minkowski

δ_{ij} : Σ 上の計量

3.ブラックホール周辺における伝搬

示すこと:

特性曲面 ＝ “effective metrics”についてnullな面

$$G^{A}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + \frac{r^2}{c_A(r)}d\Sigma^2$$

- ✓ A : Tensor, Vector, Scalarモード
- ✓ $c_A(r)$: (Σ方向への伝搬速度)^2

$$0 = \det P(x,\xi) = \left(G_S^{ab}(x)\xi_a\xi_b\right)^{p_S}\left(G_V^{cd}(x)\xi_c\xi_d\right)^{p_V}\left(G_T^{ef}(x)\xi_e\xi_f\right)^{p_T}$$

$$p_S + p_V + p_T = d(d-3)/2$$

3.ブラックホール周辺における伝搬

示すこと:

特性曲面 ＝ "effective metrics"についてnullな面

$$G^{A}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + \frac{r^2}{c_A(r)}d\Sigma^2$$

✓ A : Tensor, Vector, Scalarモード

✓ $c_A(r)$: (Σ方向への伝搬速度)^2

✓ ブラックホール摂動の式から読み取れる:

$$0 = \frac{\delta E_{\mu\nu}}{\delta(\partial_\alpha\partial_\beta g_{\rho\sigma})}\partial_\alpha\partial_\beta\delta g_{\rho\sigma} + \cdots \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta E_{\mu\nu}}{\delta(\partial_\alpha\partial_\beta g_{\rho\sigma})}\xi_\alpha\xi_\beta = P(x,\xi)$$

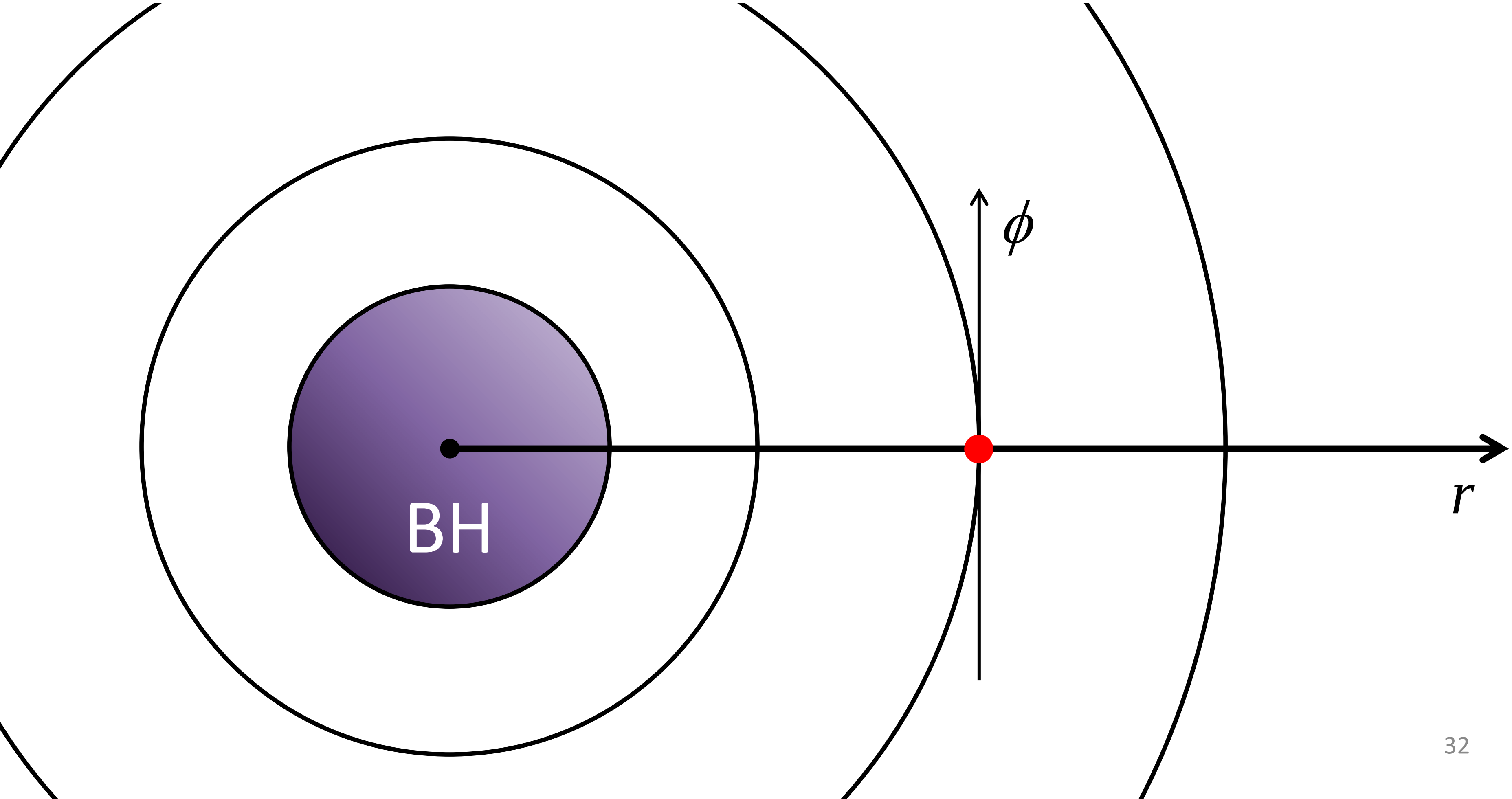
$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} - V_l(r)\right)\Psi_l(t,r) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{f(r)c_A(r)D^2}{r^2}\right)\Psi \equiv f(r)G^{\mu\nu}_A\partial_\mu\partial_\nu\Psi$$

$$\boxed{V_l(r) \ni \frac{l^2}{r^2} \simeq -\frac{1}{r^2}D^2}$$

[Dotti-Gleiser '05]
[Konoplya-Zhidenko '08]
[Takahashi-Soda '09, '10]

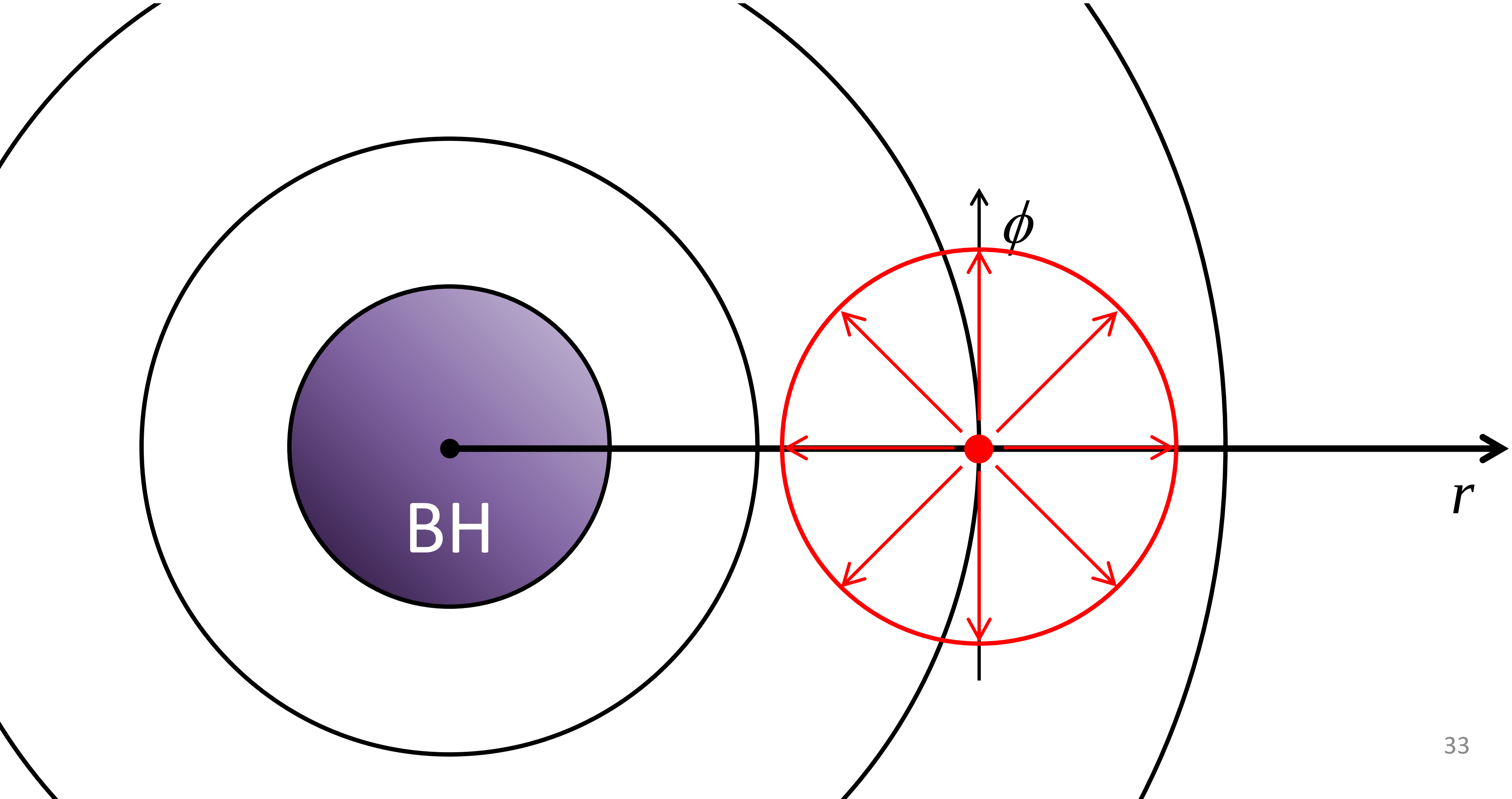
3.ブラックホール周辺における伝搬

$$G^{A}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + \frac{r^2}{c_A(r)}d\Sigma^2$$



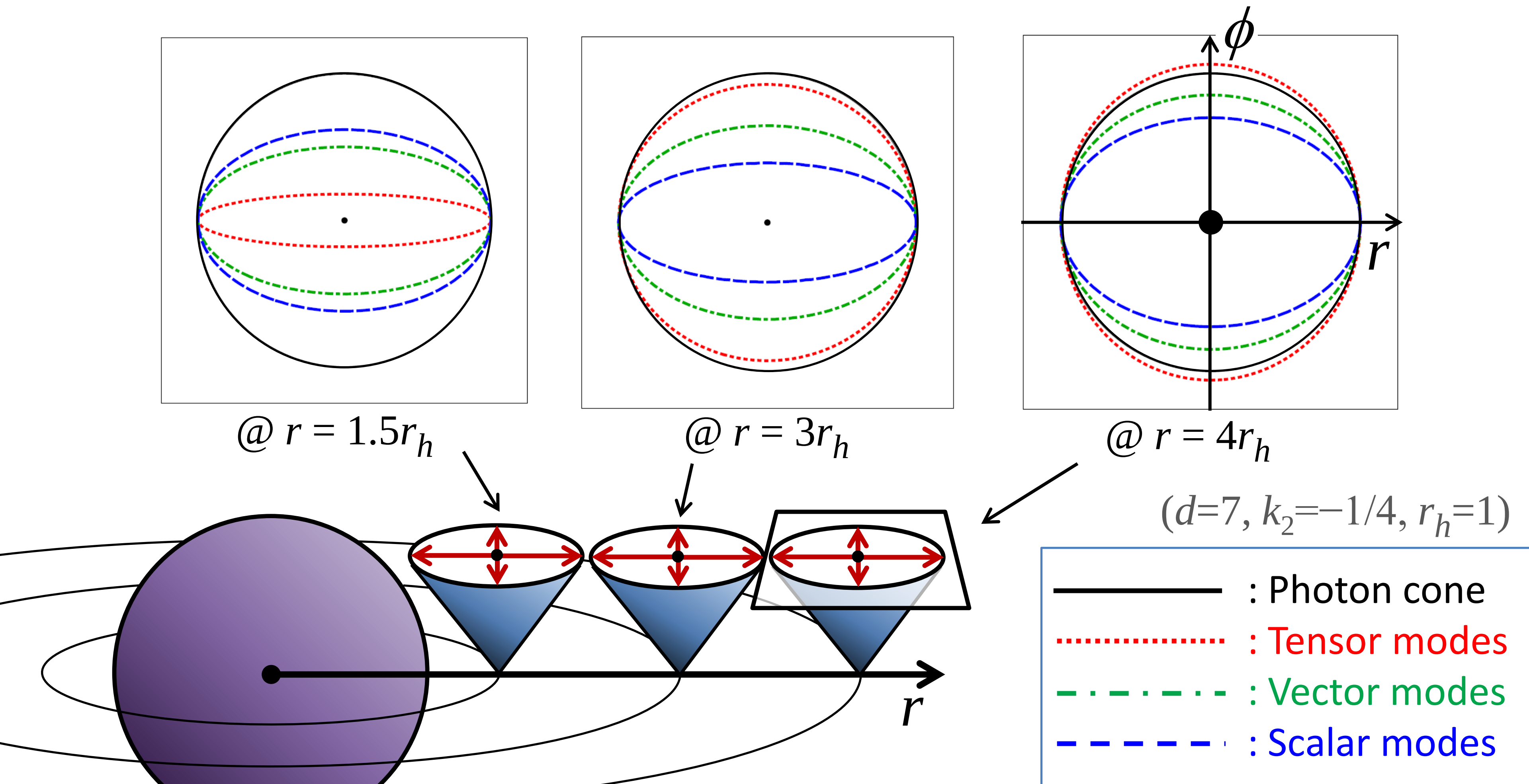
3.ブラックホール周辺における伝搬

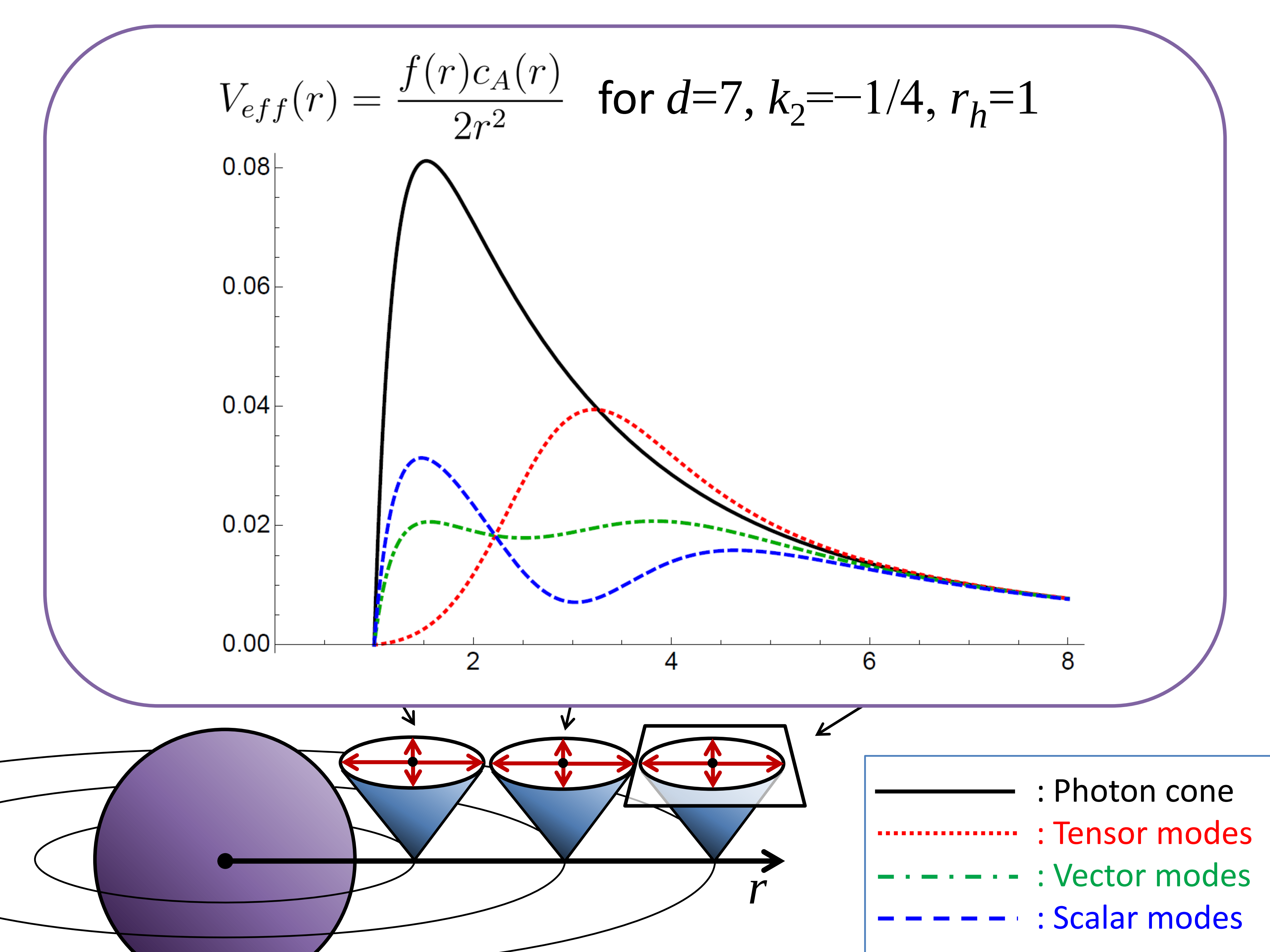
$$G^{A}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + \frac{r^2}{c_A(r)}d\Sigma^2$$



3.ブラックホール周辺における伝搬

$$G^{A}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + \frac{r^2}{c_A(r)}d\Sigma^2$$

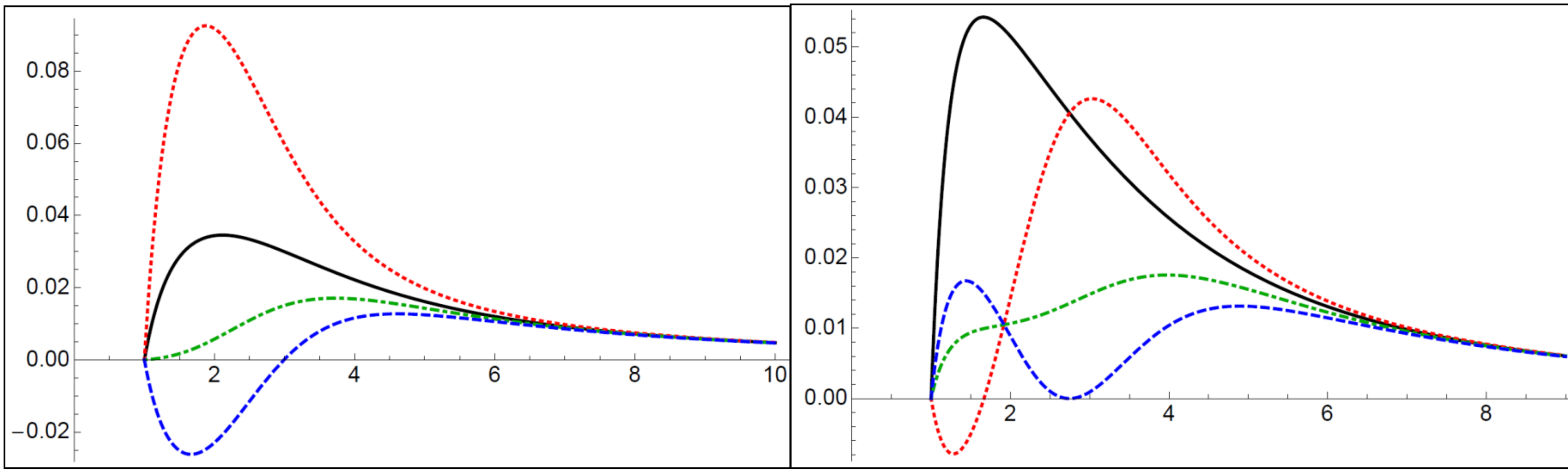


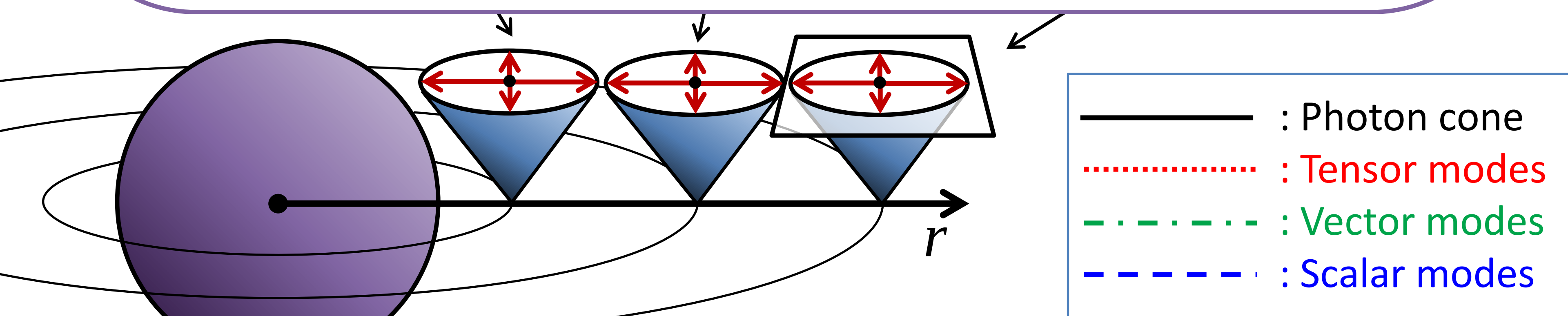


$V_{eff}(r) = \frac{f(r)c_A(r)}{2r^2}$ for d=7, k_2=−1/4, r_h=1
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
2
4
6
8
r
: Photon cone
: Tensor modes
: Vector modes
: Scalar modes

For d=5: $c_{\mathrm{scalar}}(r)<0$ near horizon

For d=6: $c_{\mathrm{tensor}}(r)<0$ near horizon





3.ブラックホール周辺における伝搬

- small BH極限 ($r_h \to 0$, k_n fixed)

P: Lovelock項の最高次数 ($d \geq 2P+1$)

$d = 2P+1$ ⇨
$$\begin{cases} c_T(r_0) = \dfrac{3}{2P-3} + \mathcal{O}(r_0^2) \\ c_V(r_0) = \mathcal{O}(r_0^4) \\ c_S(r_0) = -\dfrac{3}{2P-1} + \mathcal{O}(r_0^2) \end{cases}$$

< 0

< 0

$d \neq 2P+1$ ⇨
$$\begin{cases} c_T(r_h) = \dfrac{d-1-3P}{(d-4)P} + \mathcal{O}(r_h^2) \\ c_V(r_h) = \dfrac{d-1-2P}{(d-3)P} + \mathcal{O}(r_h^2) \\ c_S(r_h) = \dfrac{d-1-P}{(d-2)P} + \mathcal{O}(r_h^2) \end{cases}$$

< 0 for $d < 1+3P$

3.ブラックホール周辺における伝搬

- $c_A < 0 \Rightarrow$ 双曲性が破れる

$$G^{A}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + \frac{r^2}{c_A(r)}d\Sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{f(r)c_A(r)D^2}{r^2}\right)\Psi \equiv f(r)G_A^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Psi$$

$$D^2 \simeq -l^2$$

- 解釈:

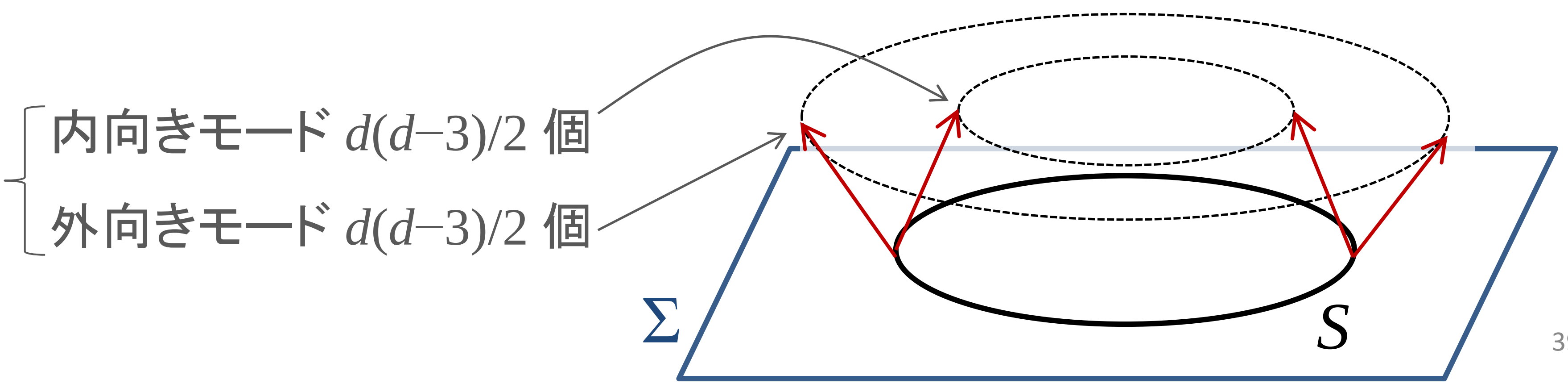
1. $\omega^2 = -\alpha^2 l^2 \Rightarrow$ 不安定性 $\propto \exp(\alpha l t)$
2. 初期値問題が well-posed でない

$$\delta g_{\mu\nu}(t,r,x) \sim e^{-\sqrt{l}}e^{\alpha l t} = \begin{cases} \bullet\, t=0 \Rightarrow \delta g, \partial^n \delta g = 0 \\ \bullet\, t>0 \Rightarrow \delta g \to \infty \end{cases}$$

with $l \to \infty$

Introduction: 双曲性

- 双曲性
  = “初期値問題が*well-posed*”
  = “よい性質の初期値に対して、時間発展が一意に決まる”
  “初期値を連続的に変化 → 解も連続的に変化”
  = Σ: 初期時刻面 (d−1次元)
  “Σ上の(d−2)次元面 S に波源を置くとする
  → Sから出る特性曲面がd(d−3) 個存在する ”



Summary

◆Lovelock重力理論における特性曲面

1. 重力摂動はブラックホールから出てくるか？

   → No: Killingホライズン＝特性曲面となっている

2. リッチ平坦N型解上の伝搬

   ✓ 特性曲面 ＝ effective metricについてnullな面

   ✓ 一番大きいconeに基づいて因果関係を定義できる

3. ブラックホール周辺における伝搬

   ✓ 特性曲面 ＝ effective metricについてnullな面

   ✓ 小さなBH解周辺では双曲性が破れる

?: 一般的な状況で、時間発展の最中に双曲性が破れることはあるか？

?: 非線形重力波の伝搬と衝撃波形成について

Thanks!

$$V_{eff}(r) = \frac{f(r)c_A(r)}{2r^2}$$ for d=5, k_2=−1/80, r_h=1, κ=0, AdS with $\ell = 1$