

素粒子宇宙理論研究室セミナー@神戸大学、2015年1月30日

ブラックホールの 急速に減衰する準固有振動 モードについて

宝利 剛（神大理、阪市大数研）

共同研究者：

安井 幸則（阪市大理）、森下 尚（阪市大理）

参考文献は、話の中で適宜紹介。

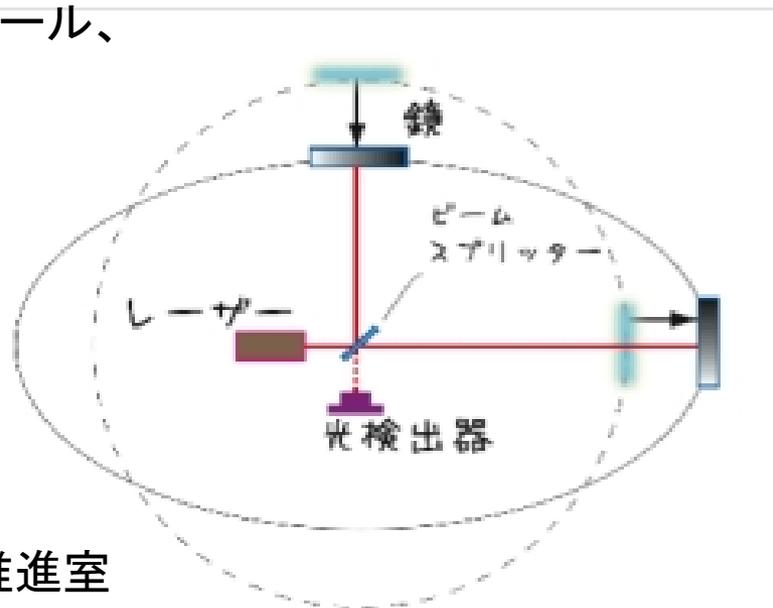
最後の7D BHのQNMの計算は森下君の修士論文(08年度)。

重力波

相対論が予言する重力現象の一つ。
しかし、直接観測は未だされていない。

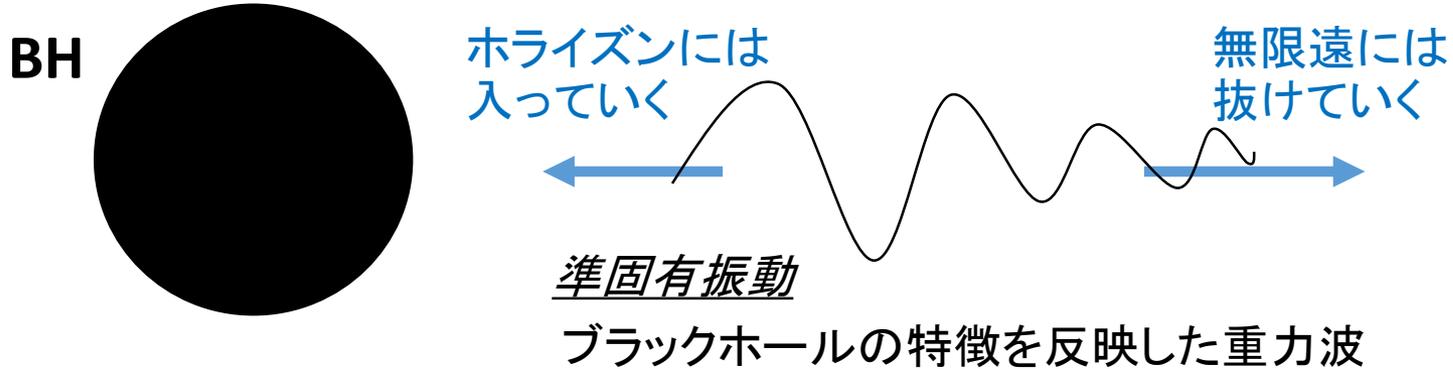
さまざまな重力波源

- コンパクト連星（中性子星やブラックホール、白色矮星など）の公転や衝突合体
- 中性子星の自転
- 宇宙ひも
- 初期宇宙からの重力波
- 超新星爆発



(画像は国立天文台重力波プロジェクト推進室
のホームページより)

ブラックホールの準固有振動

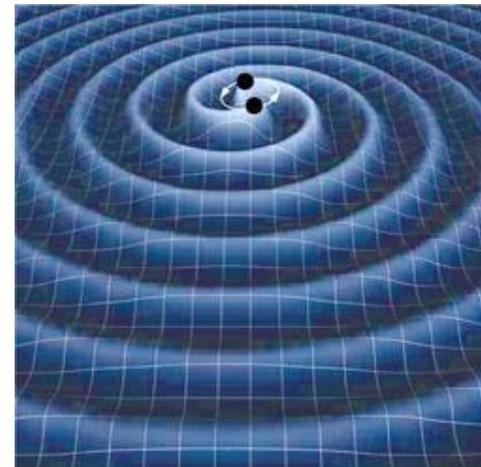


研究する動機

- 観測データから重力波の情報を効率よく正確に取り出したい
- 数値シミュレーションとよく合っている

例) 連星系のリングダウンphase

背景時空 + 摂動



(画像はNASAホームページより)

準固有振動数の特徴

*球対称の場合

重力の摂動 $h_{\mu\nu} \sim e^{-i\omega t} R_\ell(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$

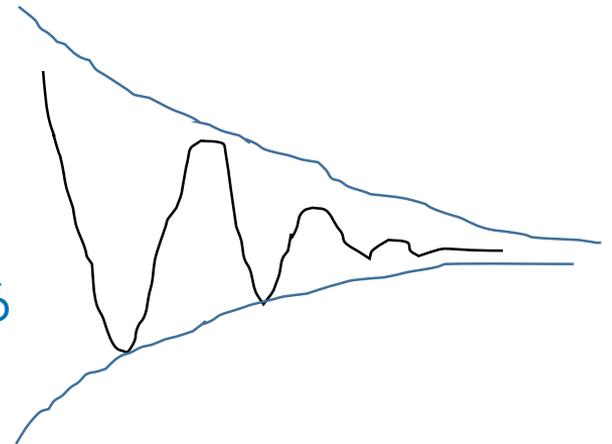
準固有振動数 (複素数として得られる)

$$\omega = \omega_R + i \omega_I$$

固有振動数に対応

減衰具合を決めている

$$\omega_I < 0$$



- 不連続に無限個の解が得られる。
- 虚部が小さい方から順に番号をつけて並べている。番号 n をモード数または tone number という。
- モード数が大きいほど、減衰が速い。

目次

- Schwarzschild BHの準固有振動モードの計算
(Leaver、Nollertの連分数を使った方法のレビュー)
- Hodの考察
- Schwarzschild BHの準固有振動モードの計算
(完全WKB解析を使った方法のレビュー)
- Schwarzschild BH以外の場合

Leaverの方法

Leaver Proc. R. Sco. Lond. A402 (1985) 285

Leaverの計算

Regge-Wheeler方程式

tortoise coordinate

$$r_* = r - 2M \log(r - 2M)/2M$$

$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2} + V(r) \right) R(r, \omega) = \omega^2 R(r, \omega)$$

ポテンシャル

$$V(r) = f(r) \left(\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} - \frac{M}{r^3} \right) \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$

漸近解 無限遠 ($r=2M$) と地平面 ($r=\infty$) でポテンシャルは消える

$$-\frac{d^2}{dr_*^2} R(r, \omega) = \omega^2 R(r, \omega)$$

$$R(r, \omega) = Ae^{-\omega r_*} + Be^{i\omega r_*} \quad \text{at boundary}$$

境界条件

$$R(r, \omega) = A e^{-i\omega r_*} + B e^{i\omega r_*} \quad \text{at boundary}$$

in-goingモード out-goingモード

- ホライズンで in-going モード
($r \rightarrow 2M$) $R(r, \omega) \sim e^{-i\omega r_*} \sim (r - 2M)^{-2iM\omega}$
- 無限遠で out-going モード
($r \rightarrow \infty$) $R(r, \omega) \sim e^{i\omega r_*} \sim e^{i\omega r} r^{2iM\omega}$

両方の境界条件を満たす一般解は、たとえば次の級数で与えられる:

$$\begin{aligned} R(r, \omega) &= e^{i\omega(r-2M)} r^{4iM\omega} (r - 2M)^{-2iM\omega} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r - 2M}{r} \right)^n \\ &= e^{-\rho(r-2M)/2M} r^{-2\rho} (r - 2M)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(r)^n \end{aligned}$$

$\rho = -2iM\omega$

級数を Regge-Wheeler 方程式へ代入して

a_n に対する漸化式

$$\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 = 0$$

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ここで、係数 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ は

$$\rho = -2iM\omega$$

$$\alpha_n = n^2 + 2n(\rho + 1) + 2\rho + 1$$

$$\beta_n = -2n^2 - 2n(4\rho + 1) - 8\rho^2 - 4\rho - \ell(\ell + 1) - 3$$

$$\gamma_n = n^2 + 4n\rho + 4\rho^2 - 4$$

- a_0 を決めれば、この漸化式により a_1, a_2, \dots と逐次的に求まる。
- 級数の収束性が満たされるように ω の値を適切に選ぶ必要がある。
→ 準固有振動数に対応

$$A_n = -\frac{a_n}{a_{n-1}} \text{ とおく}$$

$$\alpha_0 A_1 = \beta_0 \quad \alpha_{n-1} A_n = \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\beta_n - \alpha_n A_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\beta_0 = \alpha_0 A_1 = \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 - \alpha_1 A_2} = \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 - \alpha_2 A_3}} = \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_2 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_3 - \dots}}$$

$$\beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 - \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\dots}}} = 0$$

- 上式が成立するような ω が準固有振動数を与える。
- $n = N$ まで考えると、 ω に対する $2(N + 1)$ 次の代数方程式になる。
- 本当は $N \rightarrow \infty$ を取るので、準固有振動数は無限個ある。

結果

解くべき方程式は

$$\beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3} - \dots - \frac{\alpha_{N-1} \gamma_N}{\beta_N} = 0$$

LeaverはN=60まで計算した。(M = 1/2, $\ell = 2, 3$)

n	$\ell = 2$	$\ell = 3$
	ω_n	ω_n
1	(0.747343, -0.177925)	(1.198887, -0.185406)
2	(0.693422, -0.547830)	(1.165288, -0.562596)
3	(0.602107, -0.956554)	(1.103370, -0.958186)
4	(0.503010, -1.410296)	(1.023924, -1.380674)
5	(0.415029, -1.893690)	(0.940348, -1.831299)
6	(0.338599, -2.391216)	(0.862773, -2.304303)
7	(0.266505, -2.895822)	(0.795319, -2.791824)
8	(0.185617, -3.407676)	(0.737985, -3.287689)
9	(0.000000, -3.998000)	(0.689237, -3.788066)
10	(0.126527, -4.605289)	(0.647366, -4.290798)
11	(0.153107, -5.121653)	(0.610922, -4.794709)
12	(0.165196, -5.630885)	(0.578768, -5.299159)
20	(0.175608, -9.660879)	(0.404157, -9.333121)
30	(0.165814, -14.677118)	(0.257431, -14.363580)
40	(0.156368, -19.684873)	(0.075298, -19.415545)
41	(0.154912, -20.188298)	(-0.000259, -20.015653)
42	(0.156392, -20.685530)	(0.017662, -20.566075)
50	(0.151216, -24.693716)	(0.134153, -24.119329)
60	(0.148484, -29.696417)	(0.163614, -29.135345)

虚部が小さい方から順に
番号をつけて並べている。

番号 n をモード数または
tone number という。

モード数が大きいほど、
減衰が速い。

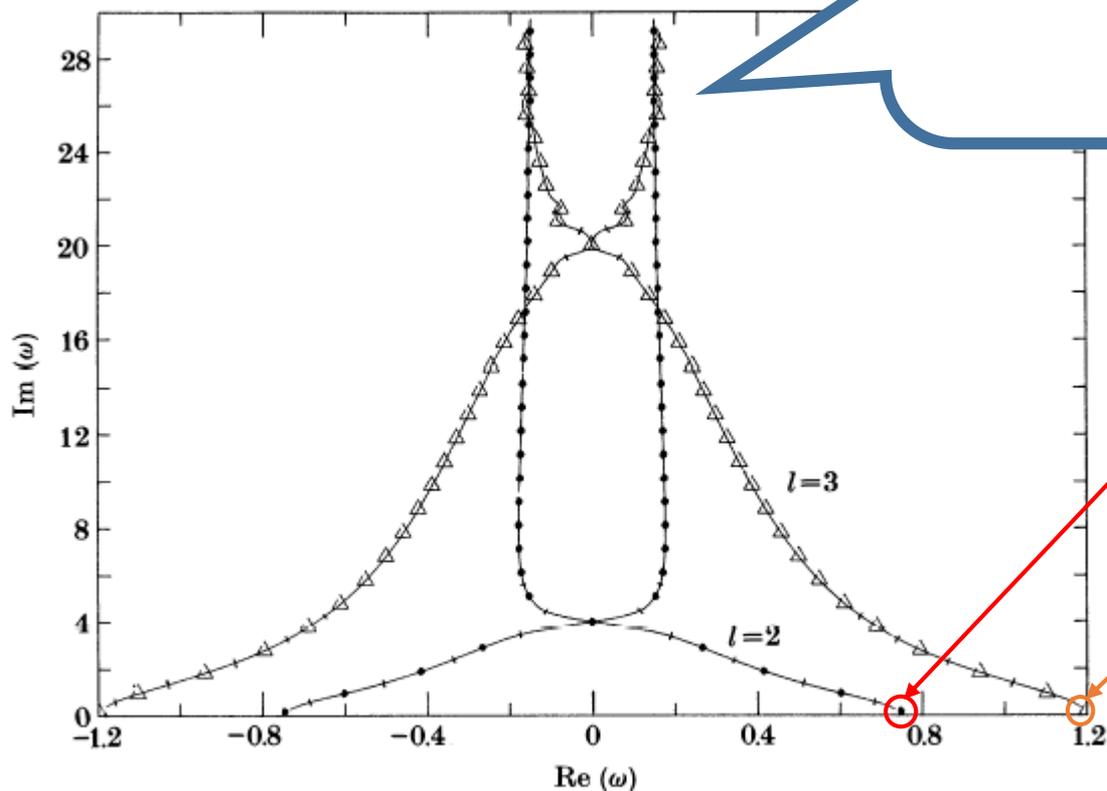
結果

Nが大きいところの振る舞い

$$\omega = 0.15 - \frac{i}{2} \left(N + \frac{1}{2} \right)$$



ℓ に依らない?



$$\omega_1 = 0.747343 - 0.177925i$$

($\ell = 2$)

$$\omega_1 = 1.198887 - 0.185406i$$

($\ell = 3$)

FIGURE 1. First 60 Schwarzschild quasi-normal frequencies for $\ell = 2$ and $\ell = 3$. The odd-order frequencies are prominently marked; a few even order frequencies are indicated as short bars perpendicular to the curves connecting the points.

Nollertの方法

Nollert, PRD47 (1993) 5253-5258

Nollertのやったこと

Leaverの計算を大きな N に対して、収束性が良くなるように改善

十分大きな N に対して、解くべき方程式は

$$\beta_N - \frac{\alpha_{N-1}\gamma_N}{\beta_{N-1} - \frac{\alpha_{N-2}\gamma_{N-1}}{\beta_{N-2} - \dots - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_0}}} = \alpha_N(-1 + \sqrt{2\rho N^{-\frac{1}{2}} + O(N^{-1})})$$

Leaverはゼロとした

計算を省略して、結果へ



Nollertの計算

Leaverの使った連分数について再考する。

(i)

$$\beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3} - \dots = 0$$

この連分数は、漸化式

$$\alpha_0 A_1 = \beta_0 \quad \alpha_{n-1} A_n = \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\beta_n - \alpha_n A_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

から得られたのであった。

$$\alpha_0 A_1 = \beta_0 \quad \alpha_{n-1} A_n = \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\beta_n - \alpha_n A_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- $n = N + 1$ に対して

$$\alpha_N A_{N+1} = \frac{\alpha_N \gamma_{N+1}}{\beta_{N+1} - \alpha_{N+1} A_{N+2}} \dots \quad \text{----- (1)}$$

- 一方で、漸化式を次のように書き換える。

$$\alpha_n A_{n+1} = \beta_n - \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\alpha_{n-1} A_n}$$

ここから、 $n = N$ に対して

$$\alpha_N A_{N+1} = \beta_N - \frac{\alpha_{N-1} \gamma_N}{\beta_{N-1} - \alpha_{N-2} \gamma_{N-1}} \dots \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_0} \quad \text{----- (2)}$$

- (1)式と(2)式を比較して、

(ii)
$$\beta_N - \frac{\alpha_{N-1} \gamma_N}{\beta_{N-1} - \alpha_{N-2} \gamma_{N-1}} \dots \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_0} = \frac{\alpha_N \gamma_{N+1}}{\beta_{N+1} - \alpha_{N+1} \gamma_{N+2}} \dots$$

$$\alpha_0 A_1 = \beta_0 \quad \alpha_{n-1} A_n = \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\beta_n - \alpha_n A_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- 十分大きな N に対して

$$A_N \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k N^{-\frac{m}{2}} = C_0 + C_1 N^{-\frac{1}{2}} + C_2 N^{-1} + \dots$$

もとの漸化式へ代入する

$$(C_0 + 1)^2 N^2 + 2(C_0 + 1)C_1 N^{-\frac{1}{2}} + (C_1^2 - 2\rho)N^{-1} + \dots = 0$$

$$\Rightarrow C_0 = -1, \quad C_1 = \sqrt{2\rho}, \quad \dots$$

- 一方で、漸化式から

$$\alpha_N A_{N+1} = \frac{\alpha_N \gamma_{N+1}}{\beta_{N+1} - \alpha_{N+1} A_{N+2}} \dots$$

- 十分大きな N に対して $A_N \sim A_{N+1}$ だから

(iii)
$$\frac{\alpha_N \gamma_{N+1}}{\beta_{N+1} - \alpha_{N+1} A_{N+2}} \dots = \alpha_N (-1 + \sqrt{2\rho} N^{-\frac{1}{2}} + \dots)$$

$n = N$ までしか考えないということについて

$$(i) \quad 0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \dots}$$

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \dots} \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 - \beta_3 - \dots} \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 - \dots} \dots \frac{\alpha_{N-1} \gamma_N}{\beta_N}$$

$$(ii) \quad \beta_N - \frac{\alpha_{N-1} \gamma_N}{\beta_{N-1} - \beta_{N-2} - \dots} \frac{\alpha_{N-2} \gamma_{N-1}}{\beta_{N-2} - \dots} \dots \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_0} = \frac{\alpha_N \gamma_{N+1}}{\beta_{N+1} - \beta_{N+2} - \dots} \frac{\alpha_{N+1} \gamma_{N+2}}{\dots} \dots$$

$$\beta_N - \frac{\alpha_{N-1} \gamma_N}{\beta_{N-1} - \beta_{N-2} - \dots} \frac{\alpha_{N-2} \gamma_{N-1}}{\beta_{N-2} - \dots} \dots \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_0} = 0$$

- 十分大きな N に対して

$$(iii) \quad \frac{\alpha_N \gamma_{N+1}}{\beta_{N+1} - \beta_{N+2} - \dots} \frac{\alpha_{N+1} \gamma_{N+2}}{\dots} \dots = \alpha_N (-1 + \sqrt{2\rho N}^{-\frac{1}{2}} + \dots)$$

Nollertのやったこと

Leaverの計算を大きな N に対して、収束性が良くなるように改善

十分大きな N に対して、解くべき方程式は

$$\beta_N - \frac{\alpha_{N-1}\gamma_N}{\beta_{N-1}} - \frac{\alpha_{N-2}\gamma_{N-1}}{\beta_{N-2}} - \dots - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_0} = \alpha_N(-1 + \sqrt{2\rho}N^{-\frac{1}{2}} + O(N^{-1}))$$

Leaverはゼロとした

結果 ($M = 1/2, \ell = 2, 3, 6$)

N が大きいところの振る舞い

$$\omega = 0.087\ 424\ 7 - \frac{i}{2} \left(N + \frac{1}{2} \right) + \Omega_1(1 - i)N^{-\frac{1}{2}} + O(N^{-1})$$

↑
 ℓ に依らない

↑
 ℓ に依る

0.4850	for $\ell = 2$
1.067	for $\ell = 3$
3.97	for $\ell = 6$



Hodの考察

量子重力の香り？

Hod, PRL81 (1998) 4293-4296

Dreyer, PRL90 (2003) 081301

Hodによる指摘

Hod, PRL81 (1998) 4293-4296

Nollertによる結果

Schwarzschild BH の準固有振動数は n が大きいところで

$$M\omega = 0.043\ 712\ 3 - \frac{i}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) + O(n^{-\frac{1}{2}})$$



$$\frac{\ln 3}{8\pi} = 0.043\ 712\ 4 \quad ?$$

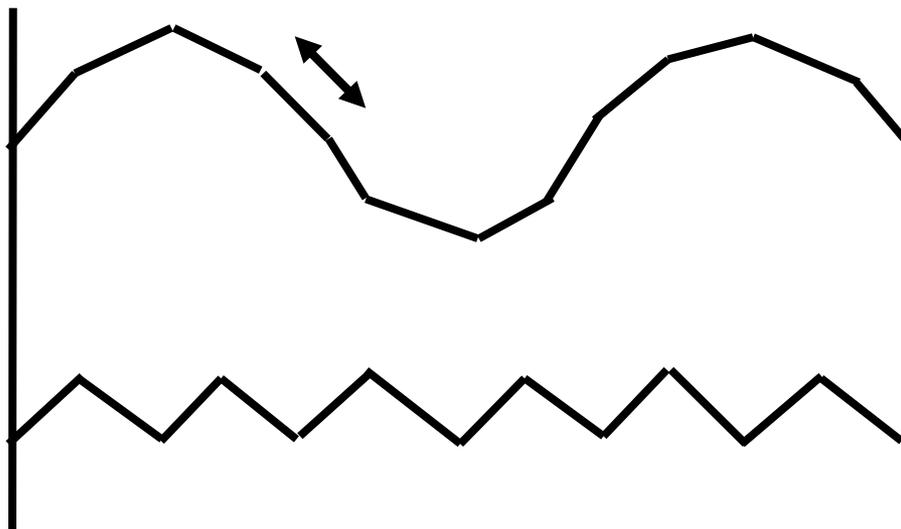
Schwarzschild BH の準固有振動数について、なぜ“上限”があるのか？

その値はどうやって決まっているのか？

Hodの考察

準固有振動数に上限があるのは、振動のサイズに最小単位が存在するから？

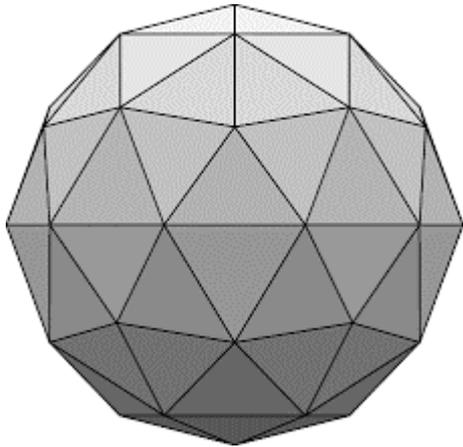
例) 弦の振動



$$\begin{aligned} \hbar &\sim L^2 & c &= G = 1 \\ \omega &\sim L^{-1} & M &\sim T \sim L \end{aligned}$$

準固有振動数に応じたエネルギー分だけブラックホールの質量は変化しているはず

$$\Delta M = \hbar\omega$$



Schwarzschild BH の面積は

$$A = 16\pi M^2$$

$$\Delta A = 32\pi M \Delta M = 32\pi M \hbar\omega$$

最小面積 A_{min} が存在するなら、それは ω_{max} と関係している？

$$A_{min} = 32\pi M \hbar\omega_{max}$$

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim \sqrt{\hbar}$$

ブラックホールの考察から、Bekenstein-Hawking エントロピーが得られていた。

$$S = \frac{A}{4\ell_P^2}$$

Bekenstein (1973), Hawking (1975)

このエントロピーがミクロな状態から計算されるものだと思おうと、状態数を n として

$$S = \ln n \quad ? \quad \Rightarrow \quad A = 4\ell_P^2 \ln n$$

$$A_{min} = 32\pi M\hbar\omega_{max} \text{ と比較して、 } M\omega_{max} = \frac{\ln n}{8\pi}$$

$n = 3$ だと準固有振動の計算と合う！

LQGとの関連

ループ量子重力理論(LQG)では、空間は量子化されていて最小の面積が存在する。

$$A = 8\pi\ell_P^2\gamma\sqrt{j(j+1)}$$

$$j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad SU(2)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots \quad SO(3)$$

ここで、 γ はイミルジパラメーターとよばれる無次元のフリーパラメーター

$$\gamma = \frac{\ln(2j_{min} + 1)}{2\pi\sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)}}$$

Astekar, Baez, Krasnov (1995)

イミルジパラメーター γ はループ量子重力理論からだけでは決められないので、他の計算から決める必要がある。

$$A_{min} = 4\ell_P^2 \ln(2j_{min} + 1) \quad \Rightarrow \quad SO(3) \quad ?$$

疑問

Hodの指摘した値を解析的に導出できないか？

→ モノドロミーを使った方法が知られている

4D Schwarzschild BH

- Motl, Adv. Theor. Math. Phys. **6** (2003) 1135-1162 [gr-qc/0212096]

4D Schwarzschild BH and 4D Reissner-Nordstrom BH

- Andersson and Howls, CQG**21** (2004) 1623-1642 [gr-qc/0307020]

D>4 Schwarzschild BH and 4D Reissner-Nordstrom BH

- Motl and Neitzke, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003) 307-330 [gr-qc/0301173]

4D Kerr BH

- Keshet and Hod, PRD**76** (2007) 061501
- Keshet and Neitzke, PRD**78** (2008) 044006

Schwarzschild BHの 急速に減衰する準固有 振動モードの解析計算

モノドロミーを用いた方法についてのレビュー

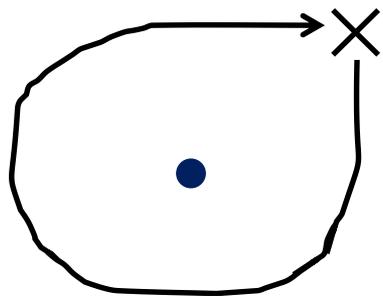
モノドロミー

2階の常微分方程式の一般解は(リーマン面上の)二つの基本解の線形結合で表される。

$$\psi(x) = Af_+ + Bf_-$$

解析接続を行い、特異点の周りを一周すると解の表示が異なる。

$$\tilde{\psi}(x) = \tilde{A}f_+ + \tilde{B}f_-$$



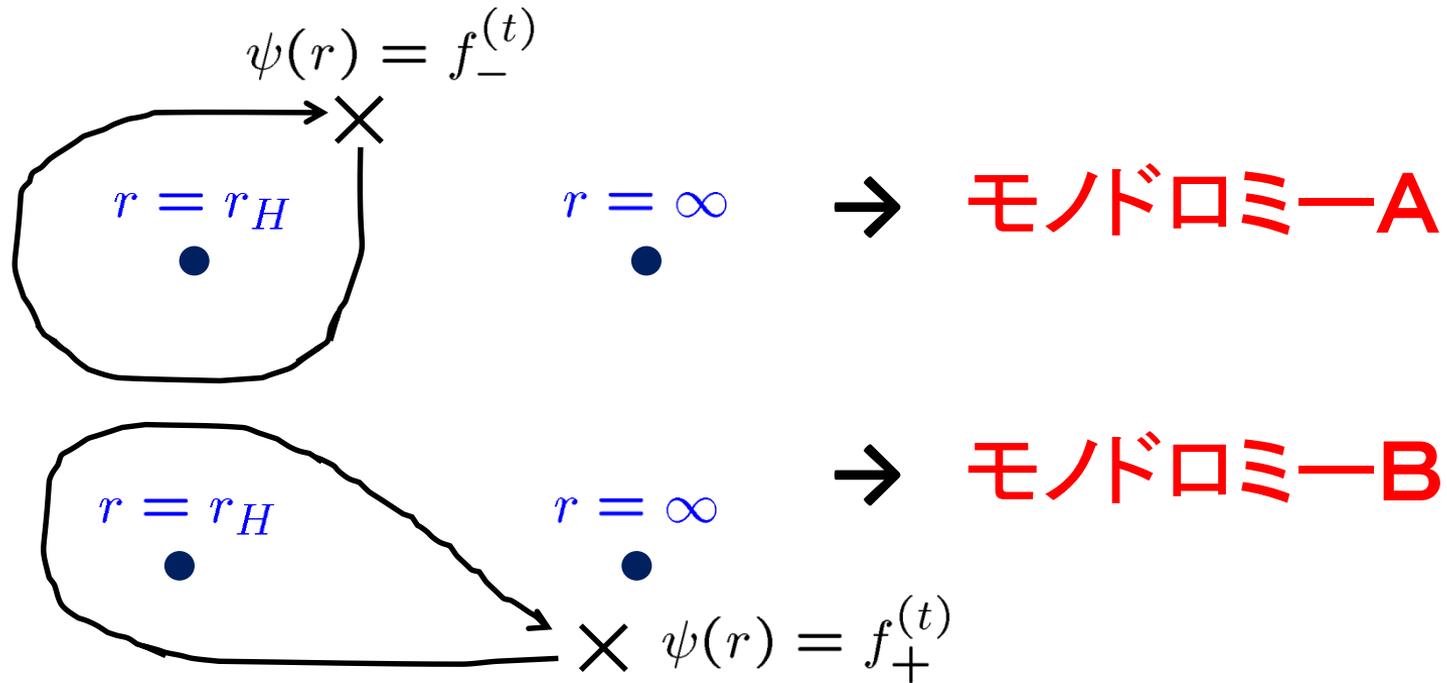
$$\psi(x) = Af_+ + Bf_-$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

モノドロミー(行列)

モノドロミー行列 C は
ホモトピークラスだけで決まっている

準固有振動の計算方法



モノドロミーはホモトピークラスだけで決まるので、

$$\text{モノドロミーA} = \text{モノドロミーB}$$

という式が立ち、この方程式から準固有振動が決まる。

教科書

どうやってモノドロミー行列を計算するか？

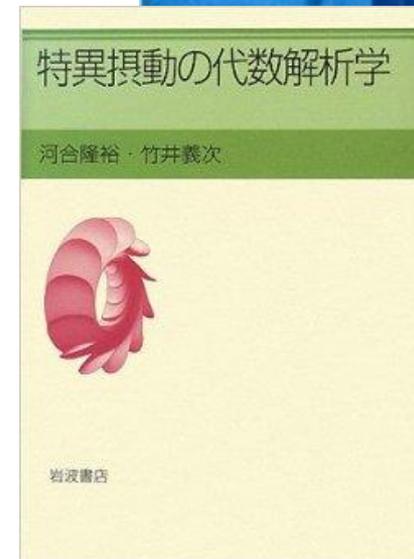
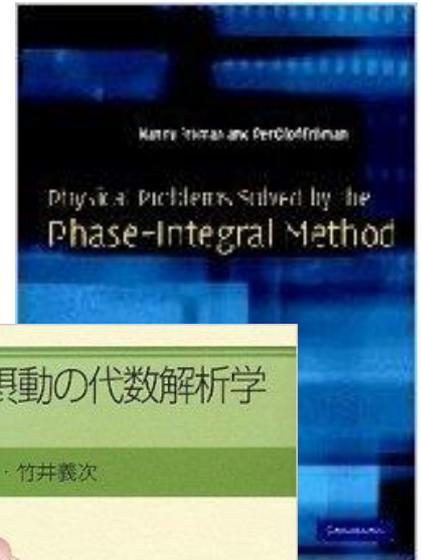
- 具体的に解析接続をして、直接計算

- Phase-integral method

教科書 Froeman and Froeman “Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method” Cam U Press

- 完全 WKB 解析

教科書 河合-竹井「特異摂動の代数解析学」岩波



完全WKB解析

河合-竹井「特異摂動の代数解析学」(岩波書店)にしたがう

- Wentzel, Kramers, Brillouin (1926) による方法

シュレディンガー型微分方程式

$$\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi = E\psi$$

近似解

$$\psi \sim \frac{1}{(V(x) - E)^{\frac{1}{4}}} \exp \left[\pm \frac{1}{\hbar} \int^x \sqrt{V(x) - E} dx \right]$$

- 完全WKB解析 [Voros (1983)]

WKB展開を全次数で扱う。

WKB解

シュレーディンガー型微分方程式

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q(x) \right] \psi(x, \eta) = 0$$

η は大きなパラメーター

WKB解

$$\psi = \exp \left[\int_{x_0}^x S(x, \eta) dx \right]$$

ここで、 $S(x, \eta) = S_{-1}(x)\eta + S_0(x) + S_1(x)\eta^{-1} + \dots$

$$\begin{cases} S_{-1}^2 = Q \\ 2S_{-1}S_j = - \sum_{k+l=j-1} S_k S_l - \frac{dS_{j-1}}{dx} \quad (j \geq 0) \end{cases}$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q(x)\right]\psi(x, \eta) = 0$$

η は大きなパラメーター

$$S = S_{\text{odd}} + S_{\text{even}}$$

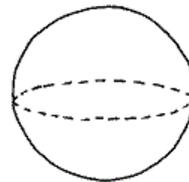
$$S_{\text{odd}} = \sum_{j \geq 0} S_{2j-1} \eta^{1-2j}, \quad S_{\text{even}} = \sum_{j \geq 0} S_{2j} \eta^{-2j}$$

と書けば、

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left[\pm \int_{x_0}^x S_{\text{odd}} dx\right]$$

が二つの線形独立な基本解を与えている。

ここで、 S_{odd} は $\sqrt{Q(x)}$ の定めるRiemann面上の関数である。



genus 0



genus 1



genus 2

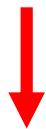
WKB解は一般に、形式級数であり収束していない。しかし、WKB解から真の解を得ることができる。

Borel 総和法

形式級数 $f = e^{\eta s} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \eta^{-n-\alpha}$ を考える。(s, f_n , α は定数)

Borel 変換 

$$f_B(y) := \sum_n \frac{f_n}{\Gamma(n + \alpha)} (y + s)^{n+\alpha-1}$$

Borel 和 

$$F(\eta) := \int_s^{\infty} e^{-\eta y} f_B(y) dy$$

$F(\eta)$ がちゃんと意味のある関数として定義できるとき、形式級数 f は Borel 総和可能であるという。

WKB解への適用

$$\begin{aligned}\psi_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(x, \eta)}} \exp \left[\pm \int_{x_0}^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx \right] \\ &= \exp \left[\pm \eta \int_{x_0}^x \sqrt{Q(x)} dx \right] \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \eta^{-n-1/2}\end{aligned}$$

定理 WKB解を定める積分路が Stokes 曲線を横切らなければ Borel 総和可能

WKB解のBorel和はもとの方程式の真の解になっている！

定義

- (i) $Q(a) = 0$ を満たす点 a を変わり点(零点)とよぶ。
- (ii) $Q(a) = 0$ かつ $\frac{dQ}{dx}(a) \neq 0$ を満たす変わり点 a を単純という。

定義

点 a を変わり点とするとき

$$\Im \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx = 0$$

で定まる曲線をStokes曲線とよぶ。

補題

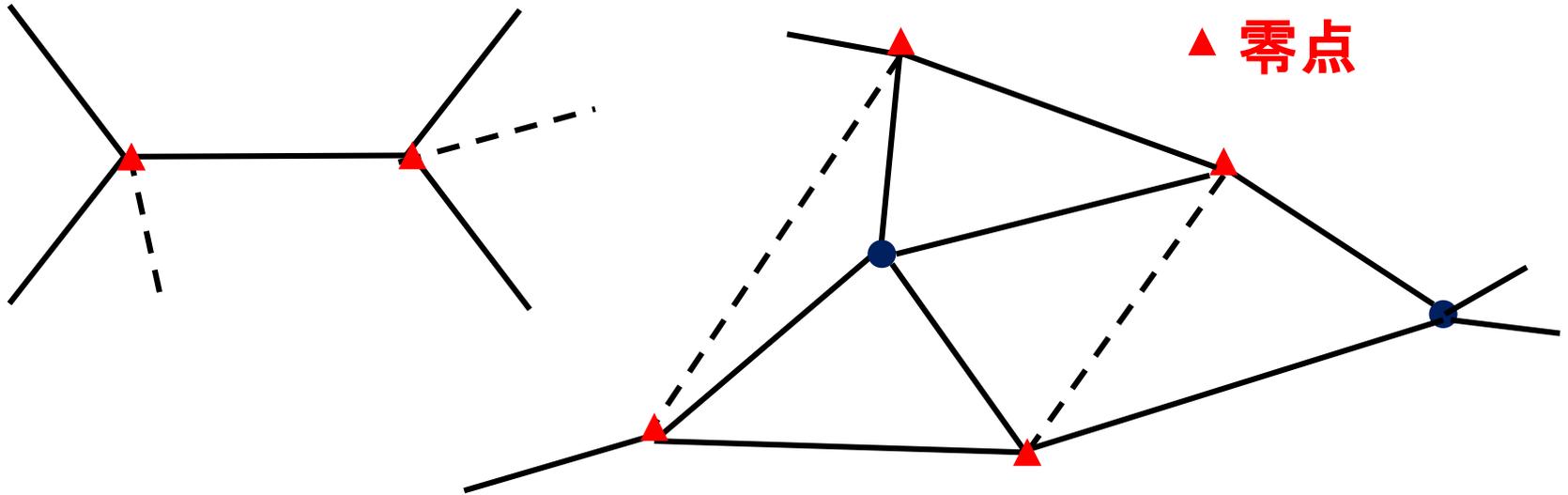
各Stokes曲線は、変わり点に流れ込むか、あるいは特異点に流れ込む。

定義

Stokes曲線で囲まれた x -平面内の領域をStokes領域とよぶ。

Stokes グラフ

- Stokes曲線
- カット
- 特異点
- ▲ 零点



すべての変わり点が単純で、またどの変わり点もStokes曲線で結ばれることはないとする。このとき、WKB解のBorel和は各Stokes領域上で確定し、そこで正則である。

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \left[\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx \right]$$

接続公式

すべての変わり点が単純で、またどの変わり点もStokes曲線で結ばれることはないとする。今、二つのStokes領域 U_1 と U_2 が、ある変わり点 a を始点とするStokes曲線 Γ を境界の一部として共有する形で隣接しているとする。このとき、WKB解

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \left[\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx \right]$$

の各領域 U_j でのBorel和を ψ_{\pm}^j ($j=1, 2$)で表すならば、 ψ_{\pm}^1 は U_2 に解析接続され、そこで ψ_{\pm}^2 と次のいずれかの関係式で結ばれる。

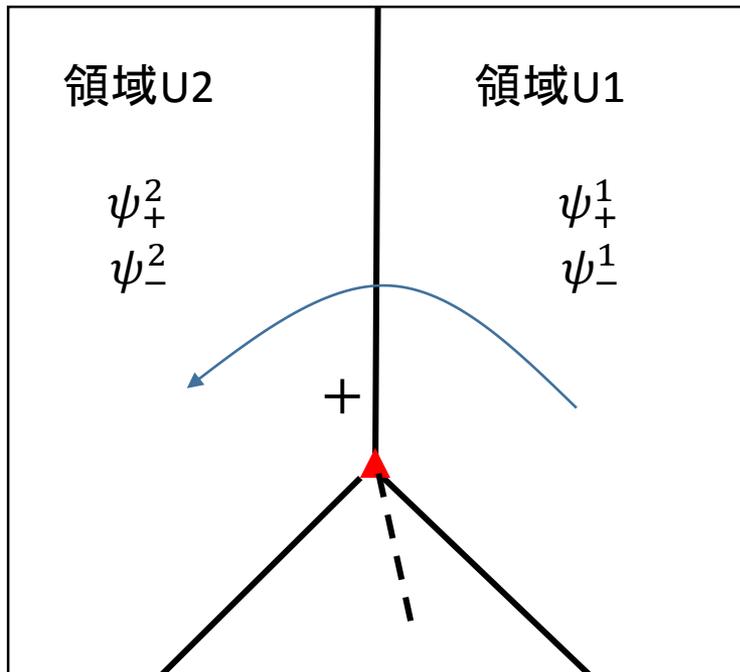
$$(a) \quad \begin{cases} \psi_{+}^1 = \psi_{+}^2 \\ \psi_{-}^1 = \psi_{-}^2 \pm i\psi_{+}^2 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \psi_{+}^1 = \psi_{+}^2 \pm i\psi_{-}^2 \\ \psi_{-}^1 = \psi_{-}^2 \end{cases}$$

(a)が起こるか(b)が起こるかは、 Γ 上の $\Re \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx$ の符号に

よって決まり、負ならば(a)、正ならば(b)が起こる。

また、 $\pm i$ の符号は、 Γ の起点である変わり点を中心に見て、 U_1 から U_2 への解析接続の道が Γ を反時計回りに横切るときに+、時計回りに横切るときに-とする。

(例)



$$(a) \quad \begin{cases} \psi_+^1 = \psi_+^2 \\ \psi_-^1 = \psi_-^2 \pm i\psi_+^2 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \psi_+^1 = \psi_+^2 \oplus i\psi_-^2 \\ \psi_-^1 = \psi_-^2 \end{cases}$$

**Schwarzschild BH
の場合に計算してみる**

Schwarzschild BHの重力摂動

Regge-Wheeler方程式

tortoise coordinate

$$r_* = r - 2M \log(r - 2M)/2M$$

$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2} + V(r) \right) R(r, \omega) = \omega^2 R(r, \omega)$$

ポテンシャル

$$V(r) = f(r) \left(\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} - \frac{M}{r^3} \right) \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$

→ シュレーディンガー型の方程式に変形する

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + Q(r) \right] \psi(r) = 0$$

ポテンシャル

$$Q(r) = \left(\frac{r^2}{\Delta} \right)^2 \left[\omega^2 - V(r) + \frac{1}{4} \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r^2} \right) \right\}^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\Delta}{r^2} \right) \right] \quad \Delta = r^2 - 2Mr$$

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + Q(r) \right] \psi(r) = 0$$

ポテンシャル

$$Q(r) = \left(\frac{r^2}{\Delta} \right)^2 \left[\omega^2 - V(r) + \frac{1}{4} \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r^2} \right) \right\}^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\Delta}{r^2} \right) \right] \quad \Delta = r^2 - 2Mr$$

WKB 解

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{odd}}} \exp\left[\int_{r_0}^r S_{odd} dr \right]$$

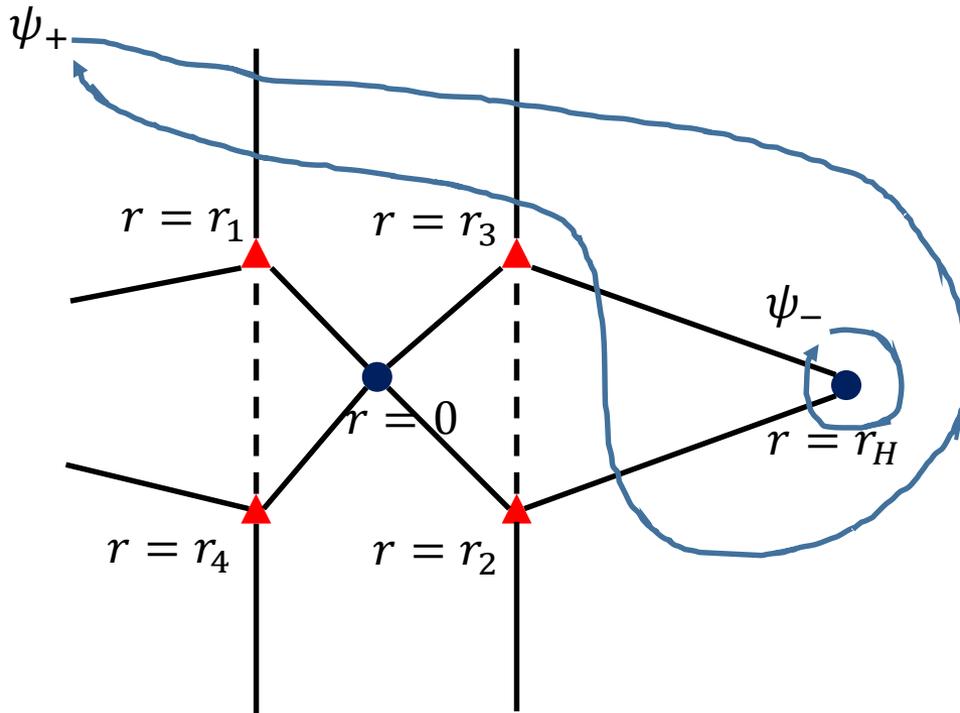
ここで、 $S_{odd} = S_{-1}\eta + S_1\eta^{-1} + S_3\eta^{-3} + \dots$ with $\eta = 1$

s.t. $S_{-1} = \sqrt{Q(r)}$ $2S_{-1}S_j = - \sum_{k+l=j-1} S_k S_l - \frac{dS_{j-1}}{dx} \quad (j \geq 0)$

Stokes グラフ

- ポテンシャル $Q(r)$ の変わり点 (零点)、特異点
- Stokes 曲線

Stokesグラフ



— Stokes曲線
--- カット

- 特異点 3個
- ▲ 零点 4個

接続公式にしたがって、モノドロミーを計算し、

$$\text{モノドロミーA} = \text{モノドロミーB}$$

という式を立てる。

結果

$|\omega|$ が大きい近似で

$$e^{8\pi\omega M} = -3$$

→

$$M\omega = \frac{\log 3}{8\pi} - \frac{i}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

計算の詳細はAndersson –Howlsの論文を参照

近似をどこで使っているか

- 基点の取替え

$$\int_{r_i}^{r_j} S_{odd} dr \sim \int_{r_i}^{r_j} \sqrt{Q(r) - 1/4r^2} dr \sim \gamma_{ij}$$

(今の場合 $-\gamma_{13} = \gamma_{32} = -\gamma_{23} = \pi$)

- ホライズン周りでの周回積分

$$\oint S_{odd} dr \sim -2\pi i \operatorname{Res}_{r=2M} \sqrt{Q(r) - 1/4r^2} \sim -4\pi i \omega M$$

その他の結果

- スピンSの場に対して (Schwarzschild BH)

$$e^{8\pi\omega M} = -1 - 2 \cos(\pi S)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} M\omega = \frac{\log 3}{8\pi} - \frac{i}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ M\omega = -\frac{n}{4} i \end{cases}$$

Scalar, gravitational

Maxwell

- Reissner-Nordstrom

$$e^{8\pi\omega M} = -3 - 2e^{-\frac{2\pi M\omega(1-\kappa)^2}{\kappa}}$$

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{q^2}{M^2}}$$

Schwarzschild limit ($\kappa \rightarrow 1$) で

$$M\omega \rightarrow \frac{\log 5}{8\pi} - \frac{i}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

議論がある

我々のやった計算

7次元Kerr-AdS BHの計算

森下君の修士論文(08年度)

高次元ブラックホールを考える動機

超弦理論や超重力理論に動機付けられて、
高次元ブラックホールの研究が盛んに行われている。

- ・ AdS/CFT対応

$$\left[\text{AdS時空} \times \begin{array}{l} \text{コンパクト} \\ \text{Einstein空間} \end{array} \right] \Leftrightarrow \text{CFT}$$

の弦理論

例) $\text{AdS}_5 \times S^5 \Leftrightarrow \text{N=4 SCFT}$

高次元Kerr-AdS時空の可積分性

高次元Kerr-AdSブラックホール時空上のさまざまな方程式が変数分離を起こす。

- 測地線方程式 Houri-Oota-Yasui '07, Frolov et al '07
- クライン-ゴルドン方程式 Frolov et al '07
- ディラック方程式 Oota-Yasui '08

- アインシュタイン-マクスウェル方程式？
- 重力摂動の方程式？

一般化されたKerr-AdS時空の構造

一般化されたKerr-AdS時空は

Houri-Oota-Yasui '08

n個のKahler-Einstein空間
の直積空間

× Kerr-AdS 時空

底空間

ファイバー

のファイバー束の構造を持っている。

例) $2m+3$ 次元Kerrブラックホールが持つ $m+1$ 個の
角運動量をすべて等しくする。

→ $CP(m) \times$ 3次元Kerr-AdS時空

一般化されたKerr-AdS時空の重力摂動

Oota-Yasui '08

一般化されたKerr-AdS時空の底空間だけに線形摂動を与える。つまり、テンソルモードに注目する。

$$g_{AB} \rightarrow g_{AB} + h_{AB} \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{\mu\nu} : \text{スカラーモード} \\ h_{\mu a} : \text{ベクトルモード} \\ h_{ab} : \text{テンソルモード} \end{array} \right.$$

μ, ν, \dots : ファイバーの添字
 a, b, \dots : 底空間の添字

→ 摂動の方程式が変数分離を起こす。

$$\delta G_{\mu\nu} = 0$$

やったこと

3つの角運動量がすべて等しい7次元Kerr-AdSブラックホールに摂動を与え、そのテンソルモードの準固有振動をWKB解析を用いて調べた。

準固有振動 (Quasi-Normal Mode) とは

- ・ 時間的に減衰していく
- ・ ホライズン近傍ではin-going waveだけが存在
- ・ 無限遠に行くにつれて減衰していく

QNMをWKB解析を用いて調べている先行研究:

Andersson-Howls '03、Daghigh-Green '08

角運動量がすべて等しい 2m+3次元のKerr-AdSブラックホールの摂動

線形摂動 $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + h_{ab}$

$$h_{ab} \sim R(r)e^{-i(\omega t - n\psi)} H_{ab}(y_I)$$

重力摂動の従う方程式は

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \left[\frac{F'}{F} - \frac{1}{r} \right] \frac{d}{dr}R(r) + V(r)R(r) = 0$$

ここで

$$V(r) = \frac{(r^2 + \xi^2)^{2m} \{ \omega(r^2 + \xi^2) - (1 - \lambda r^2)n\xi \}^2}{F^2} - \frac{(r^2 + \xi^2)^{m-1} \{ (r^2 + \xi^2)(\omega\xi - n)^2 + r^2(1 + \lambda\xi^2)[\ell(\ell + 2m) - n^2] \}}{F}$$

$$F(r) = (1 - \lambda r^2)(r^2 + \xi^2)^{m+1} - 2Mr^2$$

角運動量がすべて等しい 2m+3次元のKerr-AdSブラックホールの摂動

シュレーディンガー型の方程式に書き直すと

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi(r) + Q(r)\psi(r) = 0$$

ここで

$$Q(r) = V(r) - \frac{F''}{2F} + \frac{F'^2}{4F^2} + \frac{F'}{2rF} - \frac{3}{4r^2}$$

$$V(r) = \frac{(r^2 + \xi^2)^{2m} \{\omega(r^2 + \xi^2) - (1 - \lambda r^2)n\xi\}^2}{F^2} - \frac{(r^2 + \xi^2)^{m-1} \{(r^2 + \xi^2)(\omega\xi - n)^2 + r^2(1 + \lambda\xi^2)[\ell(\ell + 2m) - n^2]\}}{F}$$

$$F(r) = (1 - \lambda r^2)(r^2 + \xi^2)^{m+1} - 2Mr^2$$

含まれるパラメーター: $\{M, \xi, \lambda, \omega, n, \ell\}$

角運動量がすべて等しい

2m+3次元のKerr-AdSブラックホールの摂動

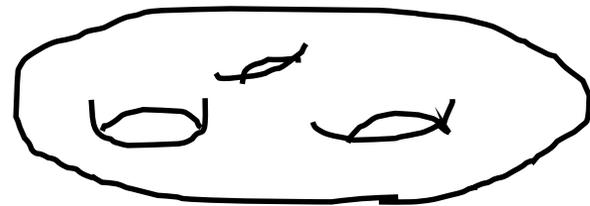
微分方程式

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi(r) + Q(r)\psi(r) = 0$$

がFuchs型になっているための条件は

$$\exists g \in \mathbb{N} \text{ s.t. } Q(r) = \frac{H(r)}{G(r)^2}, \text{ deg } H = 2g+2, \text{ deg } G = g+2$$

今の場合、 $\text{deg } H = 4m + 8$, $\text{deg } G = 2m + 5$ となっているので
この方程式はFuchs型になっている。



$\sqrt{Q(r)}$ のRiemann面の種数は $g = 2m + 3$ 。 $\sqrt{Q(r)}$ のRiemann面

角運動量がすべて等しい 7次元Kerr-AdSブラックホールの摂動

簡単のために、7次元 ($m=2$) の場合を考える. 摂動方程式は

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi(r) + Q(r)\psi(r) = 0 \quad (*)$$

ここで

$$Q(r) = V(r) - \frac{F''}{2F} + \frac{F'^2}{4F^2} + \frac{F'}{2rF} - \frac{3}{4r^2}$$

$$V(r) = \frac{(r^2 + \xi^2)^4 \{\omega(r^2 + \xi^2) - (1 - \lambda r^2)n\xi\}^2}{F^2} - \frac{(r^2 + \xi^2)\{(r^2 + \xi^2)(\omega\xi - n)^2 + r^2(1 + \lambda\xi^2)[\ell(\ell + 4) - n^2]\}}{F}$$

$$F(r) = (1 - \lambda r^2)(r^2 + \xi^2)^3 - 2Mr^2$$

含まれるパラメーター: $\{M, \xi, \lambda, \omega, n, \ell\}$

WKB解

ref.) 河合-竹井の教科書

方程式(*)のWKB解は

$$f_{\pm}^{(t)}(r) = \frac{1}{\sqrt{P(r)}} \exp\left(\pm i \int_t^r P(r') dr'\right)$$

ここで

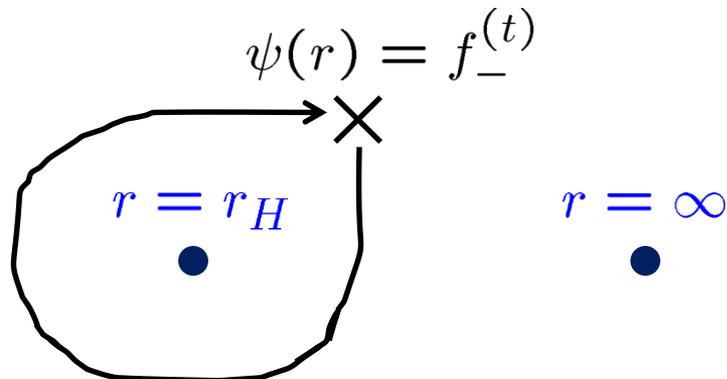
$$P(r) = \sqrt{Q(r) - \frac{F'^2}{4F^2} - \frac{1}{4r^2}}$$

と書かれる二つの関数の線形結合で得られる。

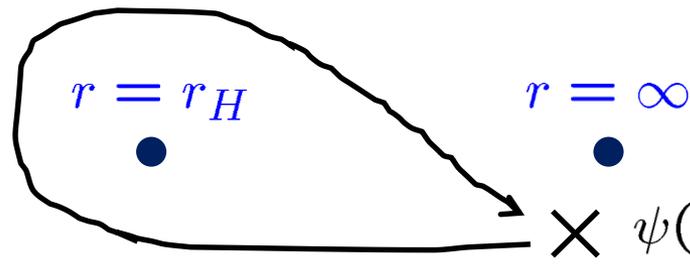
$$\psi(r) = c_1 f_+^{(t)} + c_2 f_-^{(t)}$$

$-F'^2/4F^2$ や $-1/4r^2$ はWKB解が特異点近傍で(*)の解として
`正しく`振る舞うための補正である。

準固有振動の計算方法



ホラズンの近傍で一周する
→ モノドロミーA



無限遠からホラズンを回って
無限遠に戻る

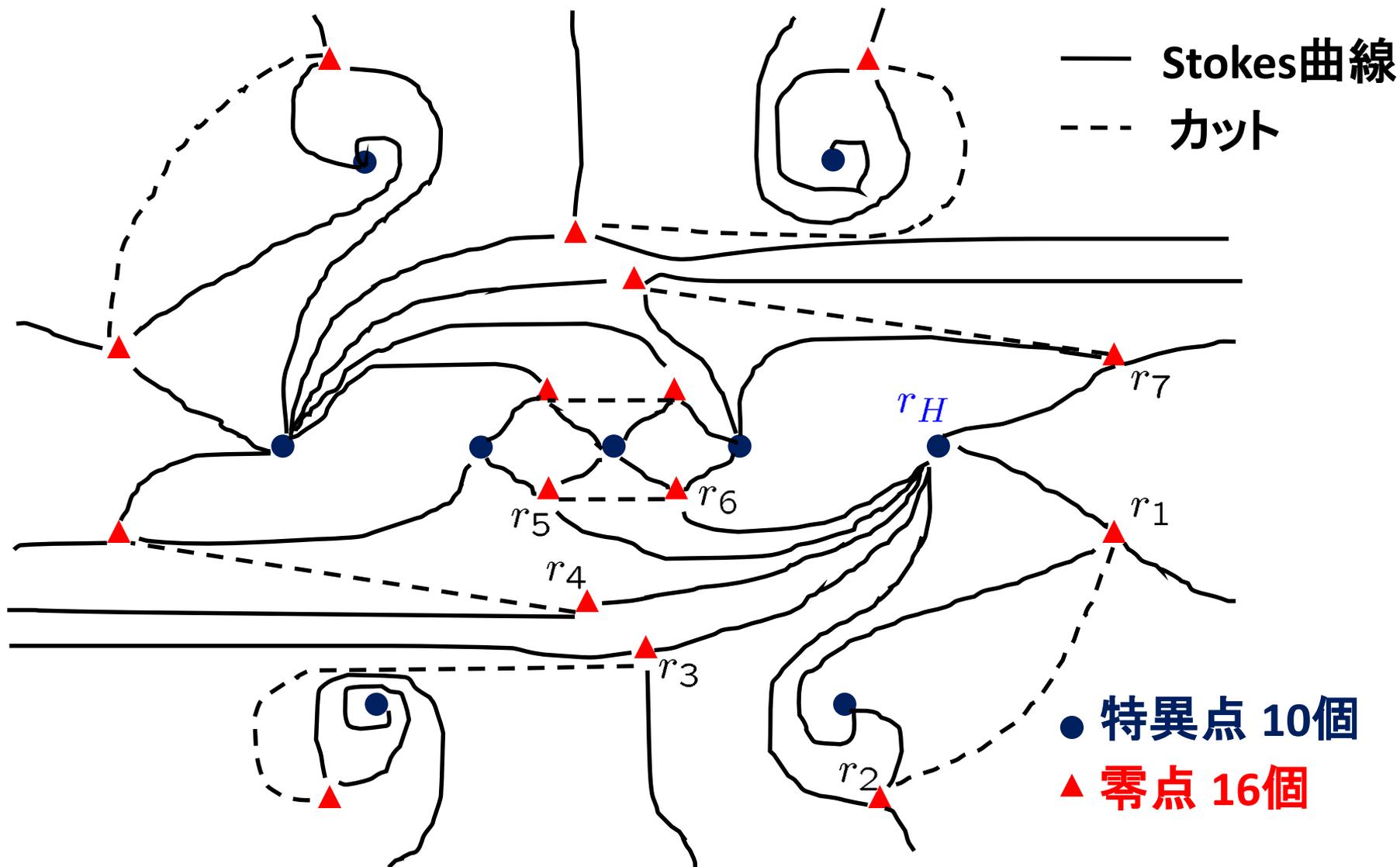
→ モノドロミーB

モノドロミーはホモトピークラスだけで決まるので、

$$\text{モノドロミーA} = \text{モノドロミーB}$$

と出来て、この方程式から準固有振動が決まる。

方程式(*)のStokesグラフ



結果

最終的に

$$e^{-i\Gamma} = -e^{-i(\tilde{\gamma}-\Gamma)}$$

を得る。

ここで

$$\Gamma = \oint_{r_H} P(r)dr \approx -2\pi i q(r_H) \approx -2\pi i \alpha \omega$$

$$\tilde{\gamma} = 2\tilde{\gamma}_{12} + \tilde{\gamma}_{13} + \tilde{\gamma}_{14} + \tilde{\gamma}_{15} + \tilde{\gamma}_{16} + \tilde{\gamma}_{17} \approx \omega \gamma$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \int_{r_i}^{r_j} P(r)dr \approx \omega \gamma_{ij}$$

$$\alpha = \frac{r_H^2 + \xi^2}{-3\lambda r_H^4 + 2r_H^2 - \xi^2} \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \quad (\alpha > 0)$$

ここから $\omega = \omega_R + i\omega_I$

$$\omega_R = \frac{-\pi\gamma(k+1/2)}{(4\pi\alpha)^2 + \gamma^2}, \quad \omega_I = \frac{-4\pi^2\alpha(k+1/2)}{(4\pi\alpha)^2 + \gamma^2} \quad k \in \mathbb{N}$$