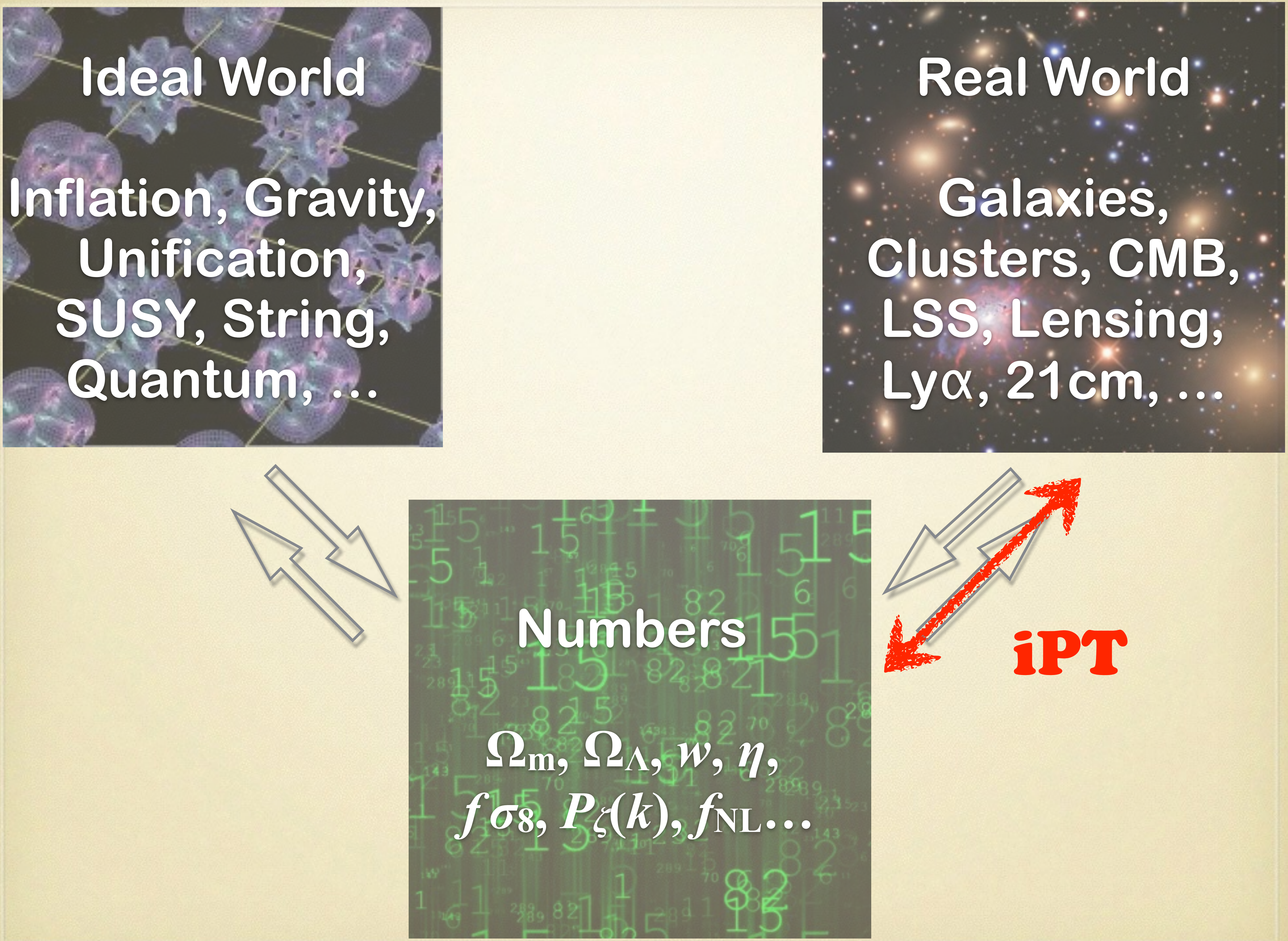
大規模構造における統合摂動論とバイアス効果

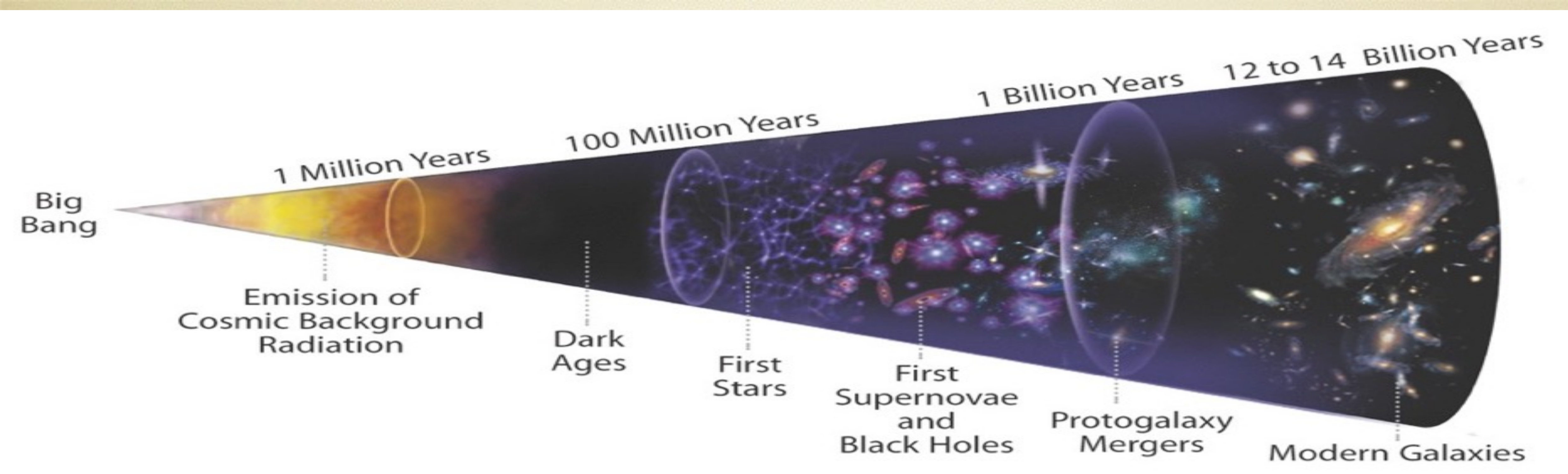
松原隆彦

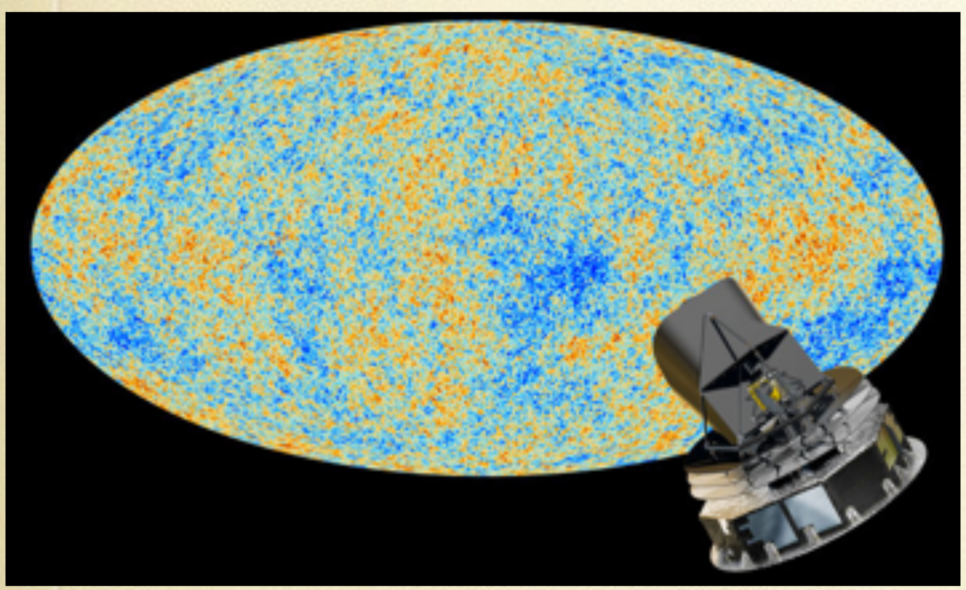
セミナー＠神戸大学

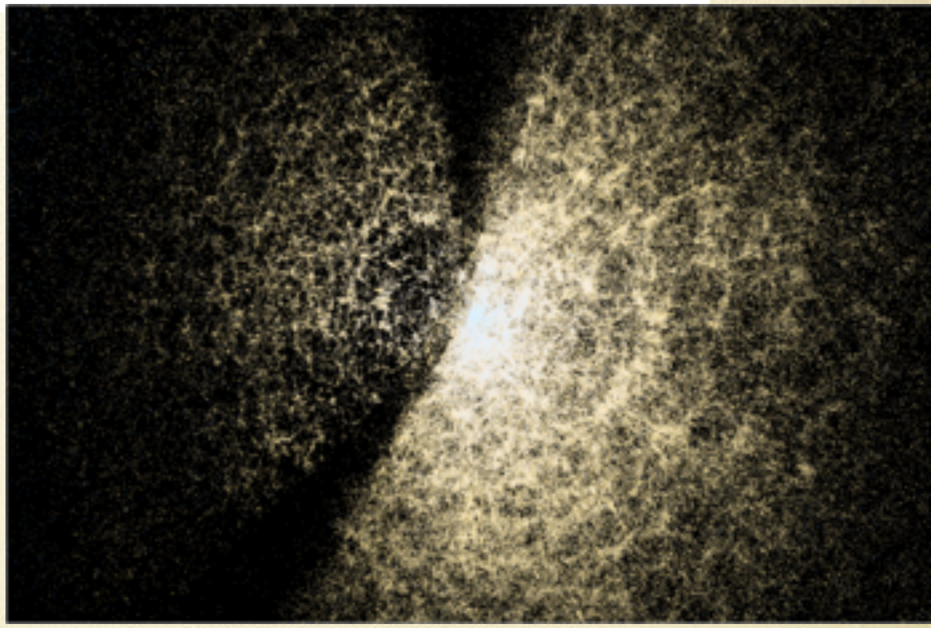
2016/5/18

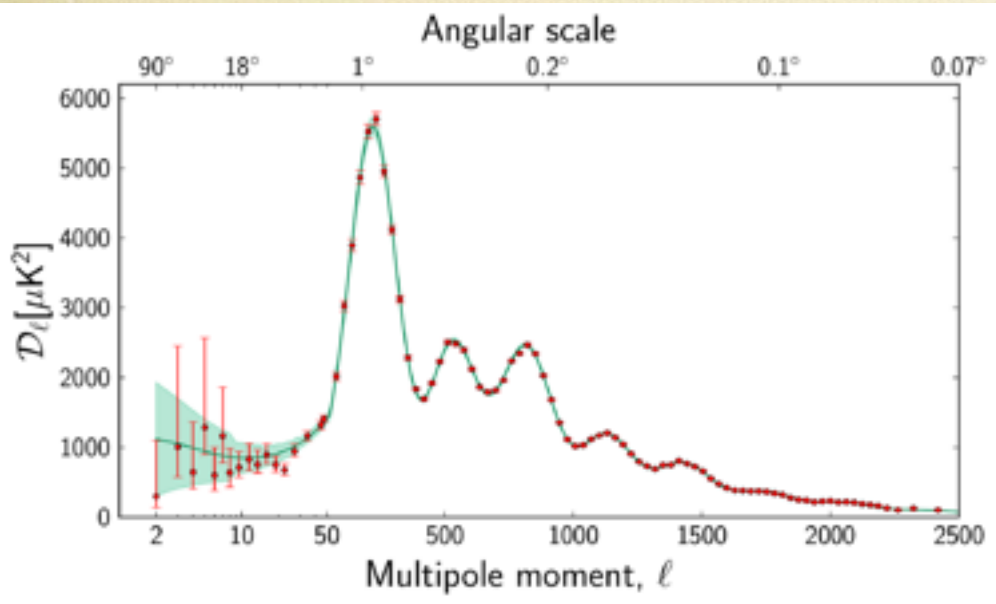


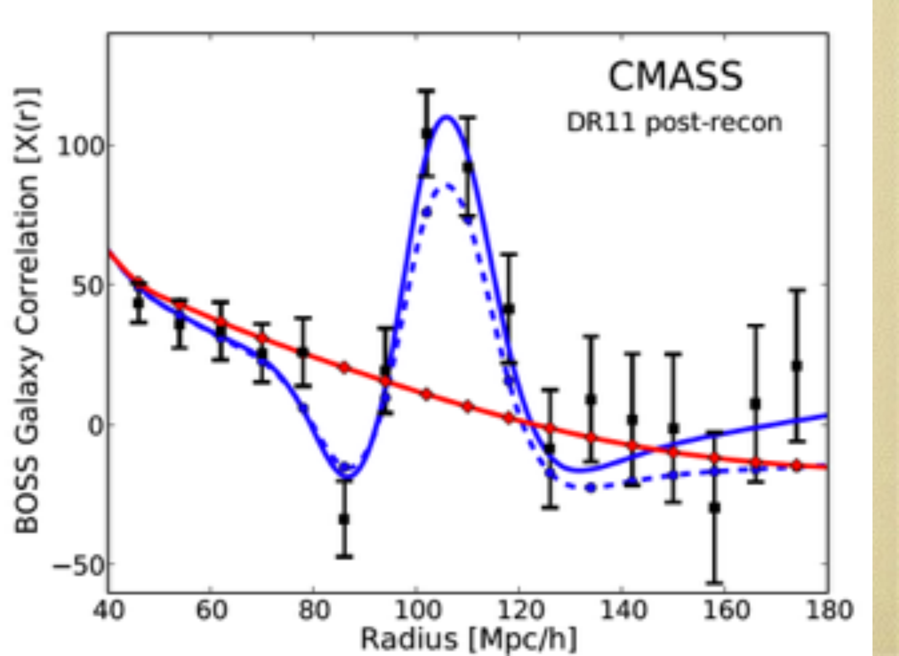
Ideal World
Inflation, Gravity, Unification, SUSY, String, Quantum, ...
Real World
Galaxies, Clusters, CMB, LSS, Lensing, Lyα, 21cm, ...
Numbers
Ω_m, Ω_Λ, w, η, $f\sigma_8$, $P_\zeta(k)$, f_{NL}…
iPT

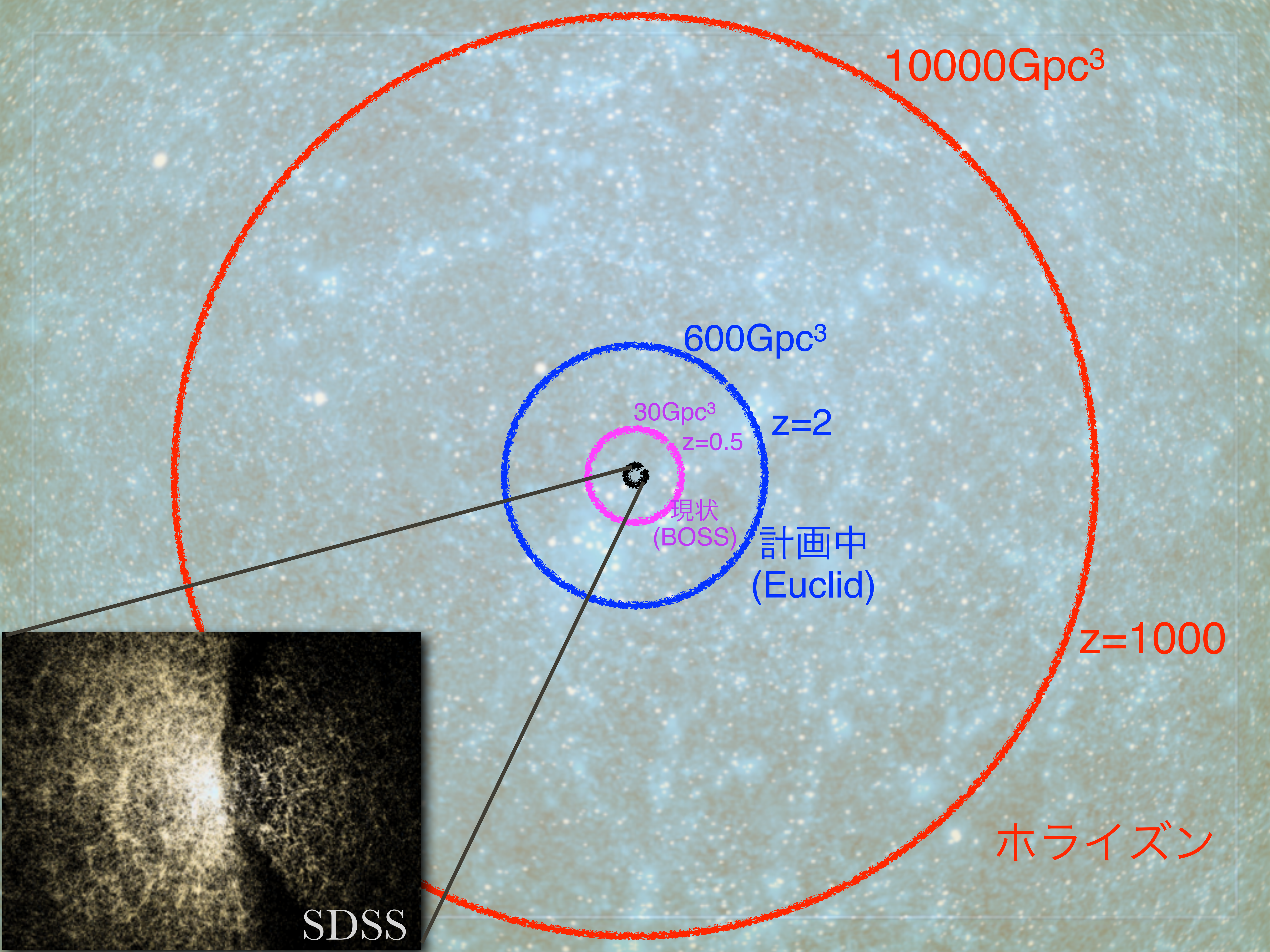

Big Bang
1 Million Years
100 Million Years
1 Billion Years
12 to 14 Billion Years
Emission of Cosmic Background Radiation
Dark Ages
First Stars
First Supernovae and Black Holes
Protogalaxy Mergers
Modern Galaxies






Angular scale
90°
18°
1°
0.2°
0.1°
0.07°
$\mathcal{D}_\ell [\mu K^2]$
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
2
10
50
500
1000
1500
2000
2500
Multipole moment, ℓ

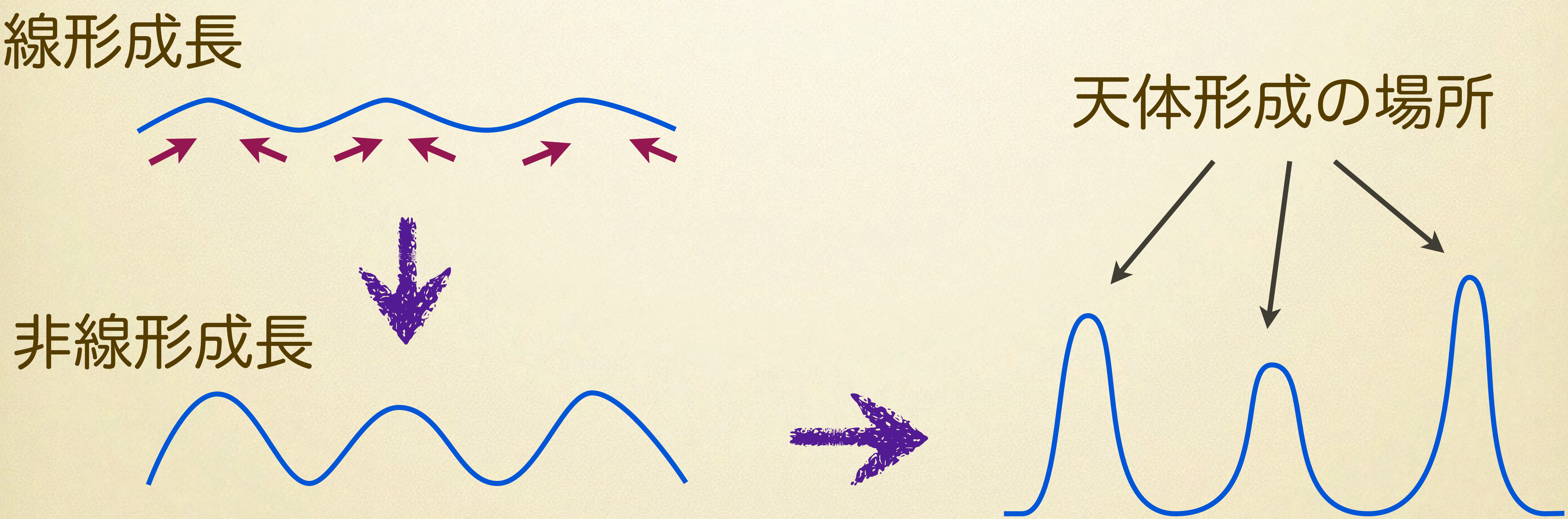

CMASS
DR11 post-recon
BOSS Galaxy Correlation [X(r)]
100
50
0
−50
40
60
80
100
120
140
160
180
Radius [Mpc/h]



10000Gpc³
600Gpc³
30Gpc³
z=2
z=0.5
現状
(BOSS)
計画中
(Euclid)
z=1000
ホライズン
SDSS

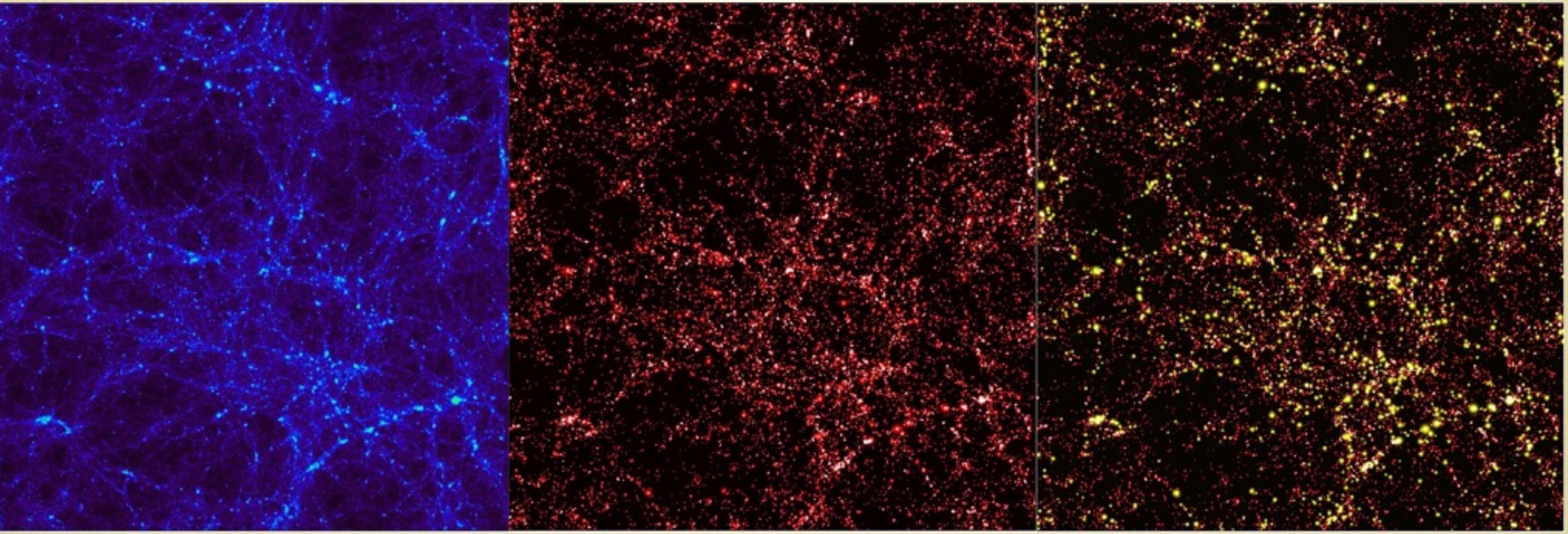
大規模構造の形成

・ゆらぎの線形成長と非線形成長、天体形成



精密宇宙論には精密な理論が必要

- 非線形成長
  - 精密宇宙論では、大スケールにも影響する
- 赤方偏移変形
  - 銀河の特異速度は赤方偏移空間の位置を視線方向へ移動
- バイアス
  - 銀河の数密度は質量密度とは異なる



天体バイアスの問題

- 天体バイアスは一般に複雑であり、第一原理から完全に求めることは不可能
- かといって、宇宙論的情報をすべて覆い隠してしまうわけではない
- 求めたい宇宙論的情報に対して、バイアスの違いがどのように影響するのかを定量的に明らかにする必要

局所オイラーバイアス

- これまで非線形領域を表すとして使われてきた単純なバイアスのモデル：局所非線形バイアス
- 仮定：天体密度は（スムージングされた）質量密度の値から局所的な関数として決まる

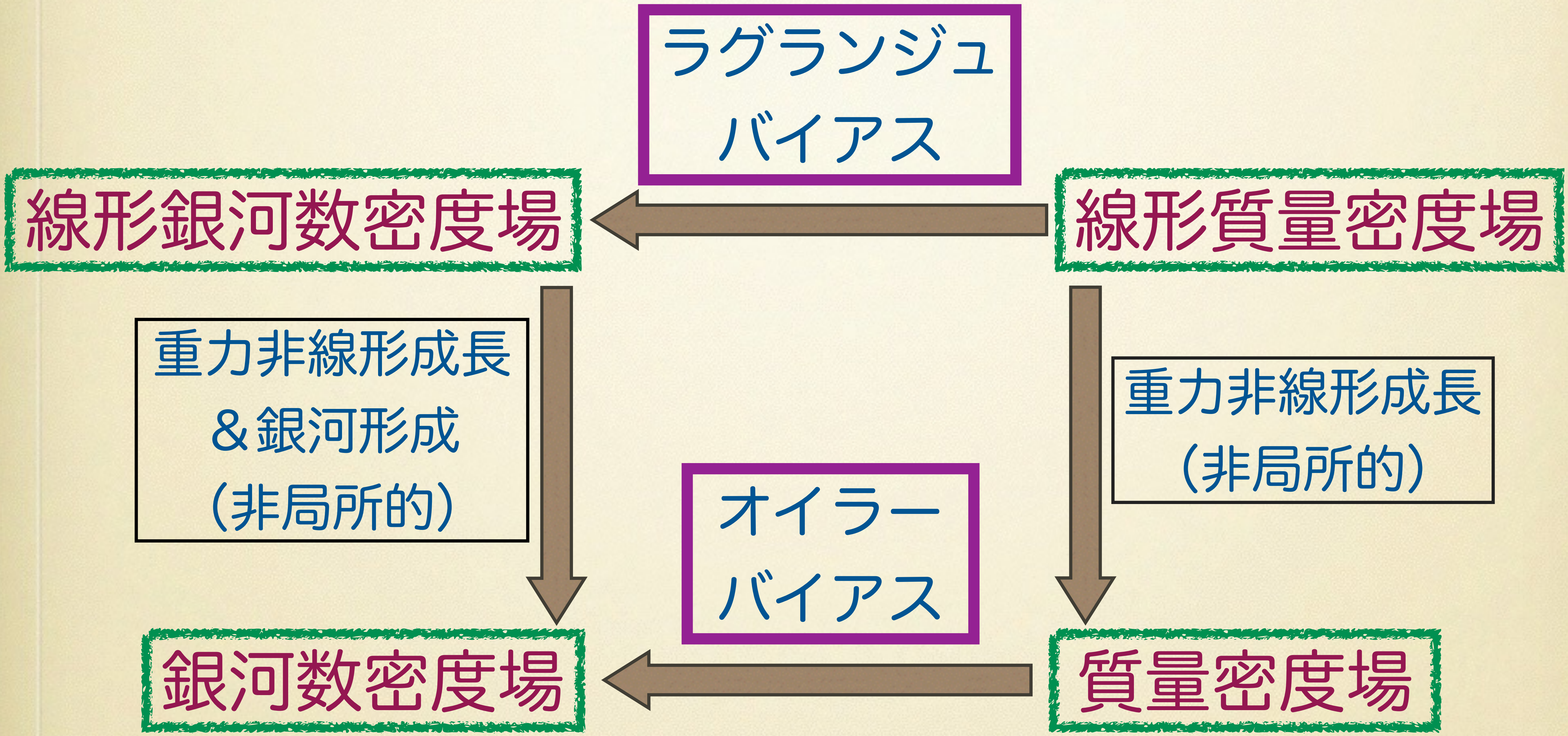
$$\delta_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{\mathrm{X}}(\delta_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}))$$

- 摂動解析のためにテイラー展開

$$\delta_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{x}) = b_0 + b_1\delta_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}) + \frac{b_2}{2!}\delta_{\mathrm{m}}^2(\boldsymbol{x}) + \cdots$$

- 現象論的なモデル、線形バイアスの単純な拡張
- 非線形の高次で発散を導くという欠点（発散を「繰り込み」対処をする方法もあるが、高次の次数ごとに新しいパラメータが必要で、本質的な解決でない）

オイラーバイアスとラグランジュバイアス

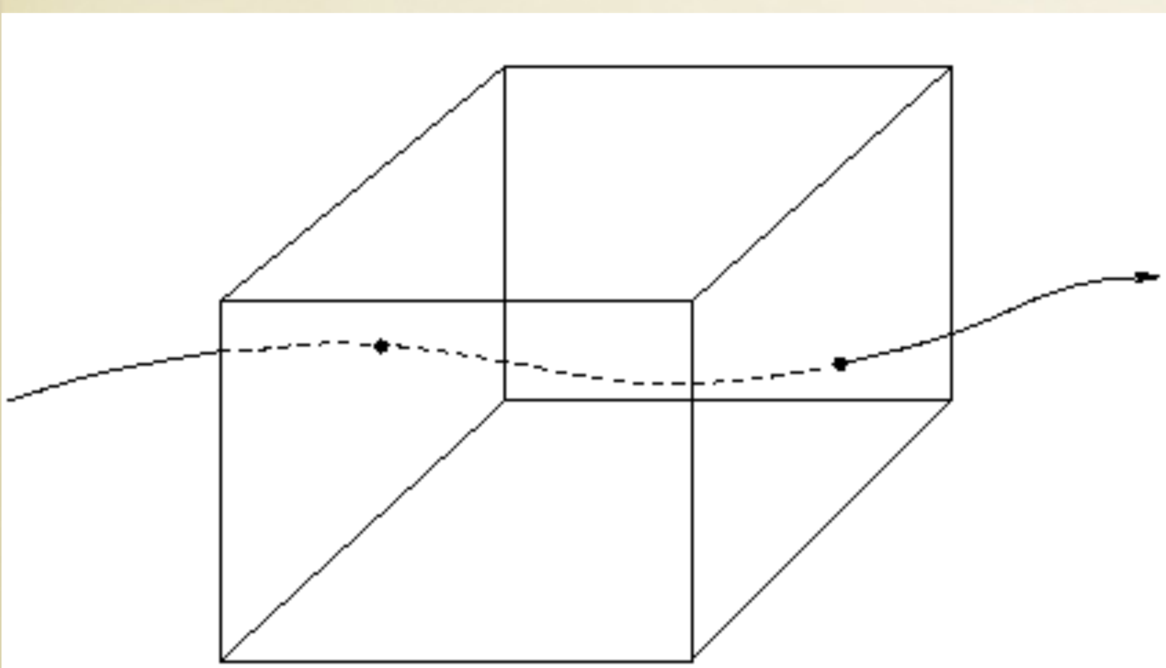


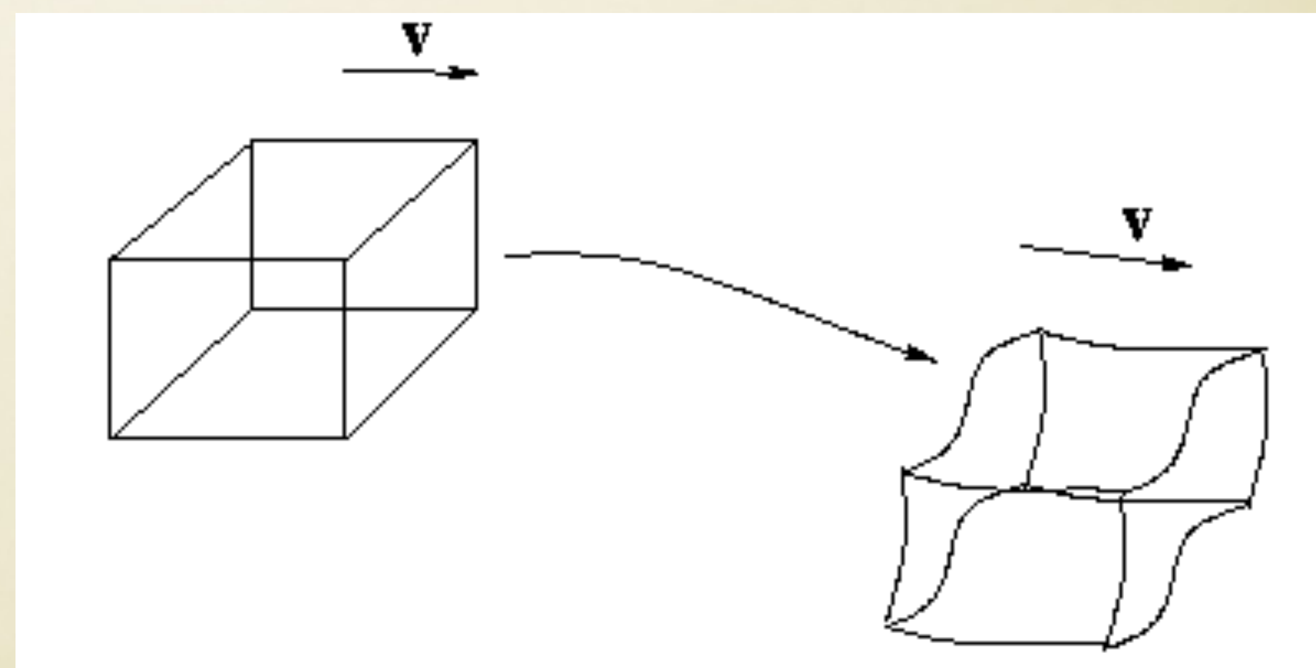
非局所バイアスの枠組みでは、オイラーバイアスとラグランジュバイアスは表現が異なるのみ

Eulerian vs Lagrangian picture

- **Eulerian**
  - density and velocity fields on a fixed space

- **Lagrangian**
  - follows a trajectory of a fluid element

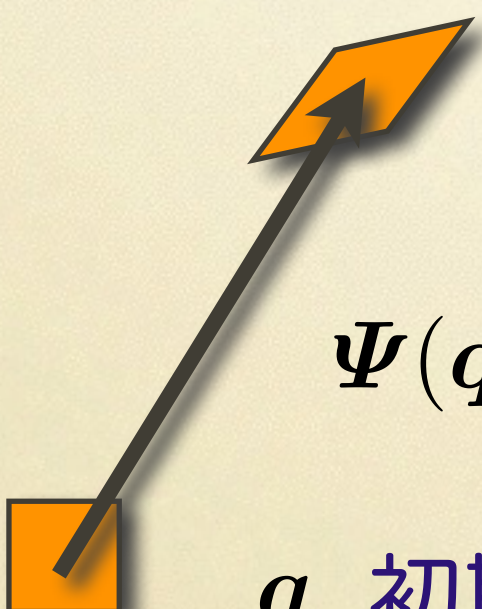




ラグランジュ摂動論

- ラグランジュバイアスを扱うため、ラグランジュ摂動論を適用する
- ラグランジュ描像における基本変数：
  - ある物質素片が初期位置からどれだけ移動したかを表すベクトル：**Displacement field**

Buchert (1989)



$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q},t)$ 終位置

$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q},t)$ 変位ベクトル

$\boldsymbol{q}$ 初期位置

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q},t)-\boldsymbol{q}$$

Zel'dovich 近似

- 変位ベクトルの線形近似

Zel'dovich (1970)

運動方程式：

$$\ddot{\boldsymbol{\Psi}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\boldsymbol{\Psi}} = -\frac{1}{a^2}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\Phi$$

$$\triangle_{\boldsymbol{x}}\Phi = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta(\boldsymbol{x},t)$$

線形化：

$$\delta(\boldsymbol{x},t) = \left[\det\left(\boldsymbol{I} + \frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\boldsymbol{q}}\right)\right]^{-1} - 1 \simeq -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\Psi}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\Psi} \simeq \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\Psi}, \quad \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{\Psi} \simeq \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\times\boldsymbol{\Psi}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\cdot\left(\ddot{\boldsymbol{\Psi}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\boldsymbol{\Psi}}\right) = -4\pi G\bar{\rho}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\Psi}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\times\left(\ddot{\boldsymbol{\Psi}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\boldsymbol{\Psi}}\right) = 0$$

（成長モード）

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\times\boldsymbol{\Psi} \simeq 0, \quad \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\Psi} \propto D(t)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi} \simeq -D(t)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\varphi_0(\boldsymbol{q})}$$

ラグランジュ摂動論の再帰的解法

TM (2015)

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + 2H\dot{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{a^2}\boldsymbol{\nabla}_x\phi(\boldsymbol{x},t), \quad \triangle_x\phi(\boldsymbol{x},t) = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta(\boldsymbol{x},t),$$

$$\hat{\mathcal{T}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q},t) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q},t).$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Psi} = D_+(t)A_+ + D_-(t)A_- - \left(\hat{\mathcal{T}} - 4\pi G\bar{\rho}\right)^{-1}\left[\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq}\Psi_{j,p}\left(\hat{\mathcal{T}} - 2\pi G\bar{\rho}\right)\Psi_{k,q} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\Psi_{i,p}\Psi_{j,q}\left(\hat{\mathcal{T}} - \frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}\right)\Psi_{k,r}\right],$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{B}_0 + E_-(t)\boldsymbol{B}_- + \hat{\mathcal{T}}^{-1}\left(\boldsymbol{\nabla}\Psi_i \times \hat{\mathcal{T}}\boldsymbol{\nabla}\Psi_i\right),$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^{(n)} = \boldsymbol{\Psi}^{(1)} + \boldsymbol{\Psi}^{(2)} + \boldsymbol{\Psi}^{(3)} + \cdots, \quad \boldsymbol{\Psi} = \triangle^{-1}\left[\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Psi}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi})\right],$$

ラグランジュ摂動論の再帰的解法

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{(n)}(\boldsymbol{k},t) = \frac{iD^n}{n!}\int_{\boldsymbol{k}_{1\cdots n}=\boldsymbol{k}} \boldsymbol{L}_n(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n)\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_0(\boldsymbol{k}_n).$$

$$\boldsymbol{L}_n(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n) = \frac{1}{{k_{1\cdots n}}^2}\left[\boldsymbol{k}_{1\cdots n}S_n(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n) + \boldsymbol{k}_{1\cdots n}\times\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n)\right].$$

$$\begin{aligned}
U(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) &= \frac{|\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_2|^2}{{k_1}^2{k_2}^2} = 1-\left(\frac{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2}{k_1k_2}\right)^2,\\
V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= \frac{|\boldsymbol{k}_1\cdot(\boldsymbol{k}_2\times\boldsymbol{k}_3)|^2}{{k_1}^2{k_2}^2{k_3}^3} = 1-\left(\frac{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2}{k_1k_2}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{k}_3}{k_2k_3}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{k}_1}{k_3k_1}\right)^2+2\frac{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{k}_3)(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{k}_1)}{{k_1}^2{k_2}^2{k_3}^2},\\
\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) &= \frac{(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)}{{k_1}^2{k_2}^2}.
\end{aligned}$$

$$S_1(\boldsymbol{k}) = 1,\quad \boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0}.$$

$$S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \frac{3}{7}U(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2),\quad \boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \boldsymbol{0}.$$

$$\begin{aligned}
S_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= \frac{5}{3}U(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{23})S_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) - \frac{1}{3}V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3),\\
\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{23})S_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3).
\end{aligned}$$

$$S_4(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_4) = \frac{28}{11}\left[U(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{234})S_3(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{234})\cdot\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4)\right]$$
$$+\frac{17}{11}U(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{34})S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)S_2(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4) - \frac{26}{11}V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_{34})S_2(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4),$$
$$\boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_4) = 2\left[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{234})S_3(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4) + \frac{\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{234}}{{k_1}^2{k_{234}}^2}(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{234})\cdot\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4)\right].$$

$$S_5(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_5) = \frac{45}{13}\left[U(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{2345})S_4(\boldsymbol{k}_2,\dots,\boldsymbol{k}_5) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{2345})\cdot\boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_2,\dots,\boldsymbol{k}_5)\right]$$
$$+\frac{70}{13}S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\left[U(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{345})S_3(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{345})\cdot\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5)\right]$$
$$-\frac{60}{13}\left\{V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_{345})S_3(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5) + \frac{(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{k}_{345}}{{k_1}^2{k_2}^2{k_{345}}^2}\left[(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_2)\times\boldsymbol{k}_{345}\right]\cdot\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5)\right\}$$
$$-\frac{75}{13}V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{23},\boldsymbol{k}_{45})S_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)S_2(\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5),$$
$$\boldsymbol{T}_5(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_5) = 3\left[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{2345})S_4(\boldsymbol{k}_2,\dots,\boldsymbol{k}_5) + \frac{\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{2345}}{{k_1}^2{k_{2345}}^2}(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{2345})\cdot\boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_2,\dots,\boldsymbol{k}_5)\right]$$
$$+2S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\left[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{345})S_3(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5) + \frac{\boldsymbol{k}_{12}\times\boldsymbol{k}_{345}}{{k_{12}}^2{k_{345}}^2}(\boldsymbol{k}_{12}\times\boldsymbol{k}_{345})\cdot\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5)\right].$$

$$
\begin{aligned}
S_6(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_6) = {} & \frac{22}{5}\Big[U(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{23456})S_5(\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_6) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{23456})\cdot \boldsymbol{T}_5(\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_6)\Big] \\
& + \frac{43}{5}S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\Big[U(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{3456})S_4(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_6) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{3456})\cdot \boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_6)\Big] \\
& + \frac{26}{5}\Big[S_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\left[U(\boldsymbol{k}_{123},\boldsymbol{k}_{456})S_3(\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6) - 2\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_{123},\boldsymbol{k}_{456})\cdot \boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6)\right] \\
& \qquad + \frac{\boldsymbol{k}_{123}\times \boldsymbol{k}_{456}}{{k_{123}}^2{k_{456}}^2}\cdot\Big\{[\boldsymbol{k}_{123}\times \boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)]\times[\boldsymbol{k}_{456}\times \boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6)]\Big\}\Big] \\
& - \frac{39}{5}\left\{V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_{3456})S_4(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_6) + \frac{(\boldsymbol{k}_1\times \boldsymbol{k}_2)\cdot \boldsymbol{k}_{3456}}{{k_1}^2{k_2}^2{k_{3456}}^2}\left[(\boldsymbol{k}_1\times \boldsymbol{k}_2)\times \boldsymbol{k}_{3456}\right]\cdot \boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_6)\right\} \\
& - \frac{124}{5}S_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\left\{V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{23},\boldsymbol{k}_{456})S_3(\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6) + \frac{(\boldsymbol{k}_1\times \boldsymbol{k}_{23})\cdot \boldsymbol{k}_{456}}{{k_1}^2{k_{23}}^2{k_{456}}^2}\left[(\boldsymbol{k}_1\times \boldsymbol{k}_{23})\times \boldsymbol{k}_{456}\right]\cdot \boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_4,\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6)\right\} \\
& - \frac{27}{5}V(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{34},\boldsymbol{k}_{56})S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)S_2(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4)S_2(\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6), \qquad \text{(B1}
\end{aligned}
$$

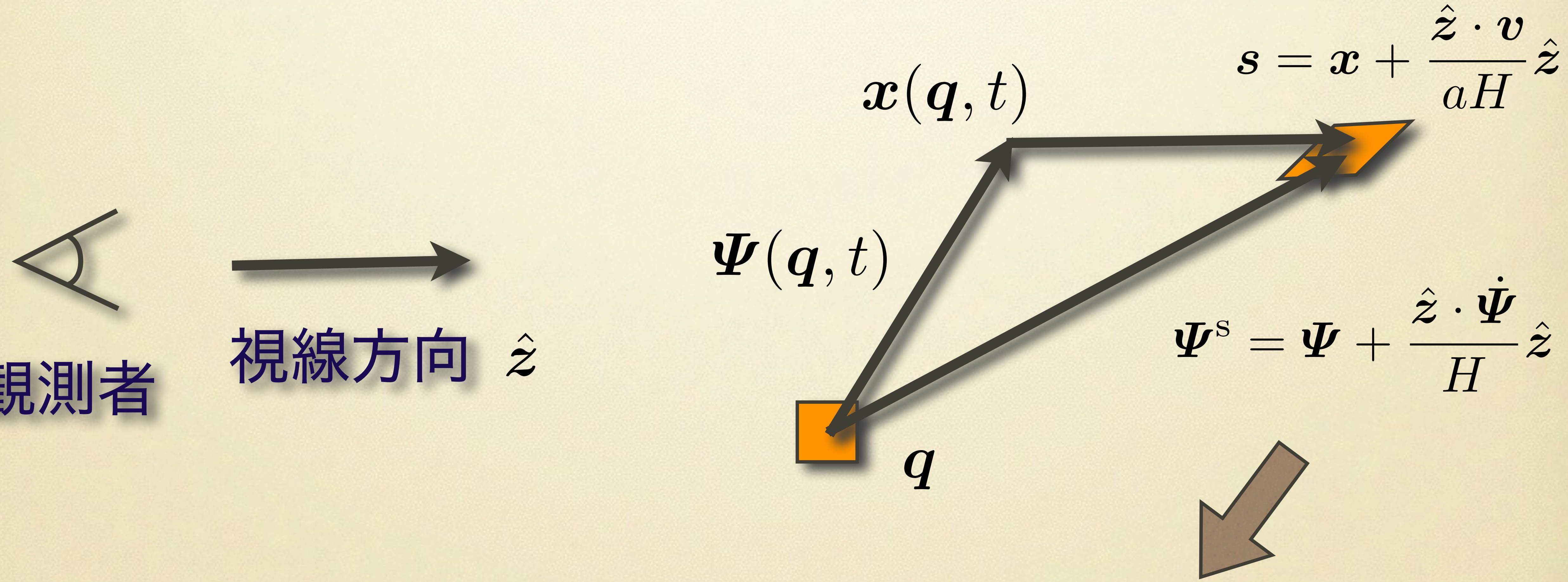
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_6(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_6) = {} & 4\Big[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{23456})S_5(\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_6) + \frac{\boldsymbol{k}_1\times \boldsymbol{k}_{23456}}{{k_1}^2{k_{23456}}^2}(\boldsymbol{k}_1\times \boldsymbol{k}_{23456})\cdot \boldsymbol{T}_5(\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_6)\Big] \\
& + 5S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\Big[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{3456})S_4(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_6) + \frac{\boldsymbol{k}_{12}\times \boldsymbol{k}_{3456}}{{k_{12}}^2{k_{3456}}^2}(\boldsymbol{k}_{12}\times \boldsymbol{k}_{3456})\cdot \boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_6)\Big]. \qquad \text{(B1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_7(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_7) = {}& \frac{91}{17}\Big[U(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{234567})S_6(\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_7) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{234567})\cdot\boldsymbol{T}_6(\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_7)\Big] \\
&+ \frac{217}{17}S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\Big[U(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{34567})S_5(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_7) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{34567})\cdot\boldsymbol{T}_5(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_7)\Big] \\
&+ \frac{315}{17}\Big[U(\boldsymbol{k}_{123},\boldsymbol{k}_{4567})S_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)S_4(\boldsymbol{k}_4,\ldots,\boldsymbol{k}_7) \\
&\qquad - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_{123},\boldsymbol{k}_{4567})\cdot[S_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_4,\ldots,\boldsymbol{k}_7) - \boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)S_4(\boldsymbol{k}_5,\ldots,\boldsymbol{k}_7)] \\
&\qquad + \frac{\boldsymbol{k}_{123}\times\boldsymbol{k}_{4567}}{k_{123}{}^2k_{4567}{}^2}\cdot\Big\{[\boldsymbol{k}_{123}\times\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)]\times[\boldsymbol{k}_{4567}\times\boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_4,\ldots,\boldsymbol{k}_7)]\Big\}\Big] \\
&- \frac{203}{17}\Big\{V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_{34567})S_4(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_7) + \frac{(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{k}_{34567}}{k_1{}^2k_2{}^2k_{34567}{}^2}[(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_2)\times\boldsymbol{k}_{34567}]\cdot\boldsymbol{T}_5(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_7)\Big\} \\
&- \frac{805}{17}S_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\Big\{V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{23},\boldsymbol{k}_{4567})S_4(\boldsymbol{k}_4,\ldots,\boldsymbol{k}_7) + \frac{(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{23})\cdot\boldsymbol{k}_{4567}}{k_1{}^2k_{23}{}^2k_{4567}{}^2}[(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{23})\times\boldsymbol{k}_{4567}]\cdot\boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_4,\ldots,\boldsymbol{k}_7)]\Big\} \\
&- \frac{490}{17}\Big[V(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{234},\boldsymbol{k}_{567})S_3(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4)S_3(\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6,\boldsymbol{k}_7) \\
&\qquad + 2S_3(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4)\frac{(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{234})\cdot\boldsymbol{k}_{567}}{k_1{}^2k_{234}{}^2k_{567}{}^2}[(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{234})\times\boldsymbol{k}_{567}]\cdot\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6,\boldsymbol{k}_7)] \\
&\qquad + \frac{(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{234})\cdot\boldsymbol{k}_{567}}{k_1{}^2k_{234}{}^2k_{567}{}^2}\boldsymbol{k}_1\cdot\Big\{[\boldsymbol{k}_{234}\times\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4)]\times[\boldsymbol{k}_{567}\times\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6,\boldsymbol{k}_7)]\Big\}\Big] \\
&- \frac{665}{17}S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)S_2(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4)\Big\{V(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{34},\boldsymbol{k}_{567})S_3(\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6,\boldsymbol{k}_7) \\
&\qquad\qquad + \frac{(\boldsymbol{k}_{12}\times\boldsymbol{k}_{34})\cdot\boldsymbol{k}_{567}}{k_{12}{}^2k_{34}{}^2k_{567}{}^2}[(\boldsymbol{k}_{12}\times\boldsymbol{k}_{34})\times\boldsymbol{k}_{567}]\cdot\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_5,\boldsymbol{k}_6,\boldsymbol{k}_7)]\Big\},
\end{aligned}
\tag{B17}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_7(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_7) = {}& 5\Big[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_{234567})S_6(\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_7) + \frac{\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{234567}}{k_1{}^2k_{234567}{}^2}(\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_{234567})\cdot\boldsymbol{T}_6(\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_7)\Big] \\
&+ 9S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\Big[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_{12},\boldsymbol{k}_{34567})S_5(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_7) + \frac{\boldsymbol{k}_{12}\times\boldsymbol{k}_{34567}}{k_{12}{}^2k_{34567}{}^2}(\boldsymbol{k}_{12}\times\boldsymbol{k}_{34567})\cdot\boldsymbol{T}_5(\boldsymbol{k}_3,\ldots,\boldsymbol{k}_7)\Big]. \\
&+ 5\Big[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}_{123},\boldsymbol{k}_{4567})S_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)S_4(\boldsymbol{k}_4,\ldots,\boldsymbol{k}_7) \\
&\qquad + \frac{\boldsymbol{k}_{123}\times\boldsymbol{k}_{4567}}{k_{123}{}^2k_{4567}{}^2}\Big\{(\boldsymbol{k}_{123}\times\boldsymbol{k}_{4567})\cdot[S_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_4,\ldots,\boldsymbol{k}_7) - \boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)S_4(\boldsymbol{k}_4,\ldots,\boldsymbol{k}_7)] \\
&\qquad\qquad + [\boldsymbol{k}_{123}\times\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)]\cdot[\boldsymbol{k}_{4567}\times\boldsymbol{T}_4(\boldsymbol{k}_4,\ldots,\boldsymbol{k}_7)]\Big\}\Big].
\end{aligned}
\tag{B18}
$$

赤方偏移空間

- ラグランジュ摂動論：赤方偏移空間への拡張が容易
  - ラグランジュ変数では、実空間から赤方偏移空間への写像が厳密に線形
    c.f.) オイラー変数では非線形写像
  - ラグランジュ積分核を線形変換したものにするだけで**OK**



$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{s}(n)}=\boldsymbol{\Psi}^{(n)}+\frac{\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(n)}}{H}\hat{\boldsymbol{z}}\simeq\boldsymbol{\Psi}^{(n)}+nf(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{\Psi}^{(n)})\hat{\boldsymbol{z}}$$

iPT

- 統合摂動論
- **integrated Perturbation Theory**

統合摂動論 (iPT) 要約

- オイラー空間の密度ゆらぎ（観測量）とラグランジュ変数の関係

$$1 + \delta_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{x}) = \int d^3q \left[1 + \delta_{\mathrm{X}}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})\right] \delta_{\mathrm{D}}^3[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q})]$$

オイラー空間
密度ゆらぎ

ラグランジュ空間
バイアス

変位ベクトル
（& 赤方偏移変形）

- フーリエ空間における摂動展開

ラグランジュ・バイアスの積分核

$$\delta_{\mathrm{X}}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}_{1\cdots n} - \boldsymbol{k}) b_n^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_n) \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1) \cdots \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_n)$$

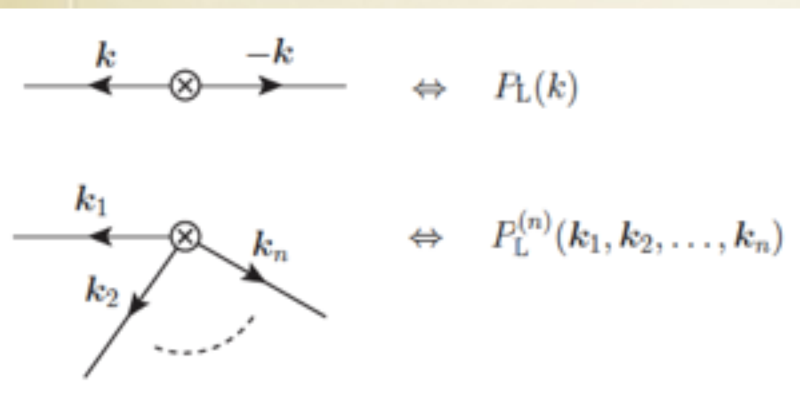
$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}_{1\cdots n} - \boldsymbol{k}) \boldsymbol{L}_n(\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_n) \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1) \cdots \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_n)$$

$$\boldsymbol{k}_{1\cdots n} \equiv \boldsymbol{k}_1 + \cdots + \boldsymbol{k}_n$$

変位ベクトル（& 赤方偏移変形）の積分核

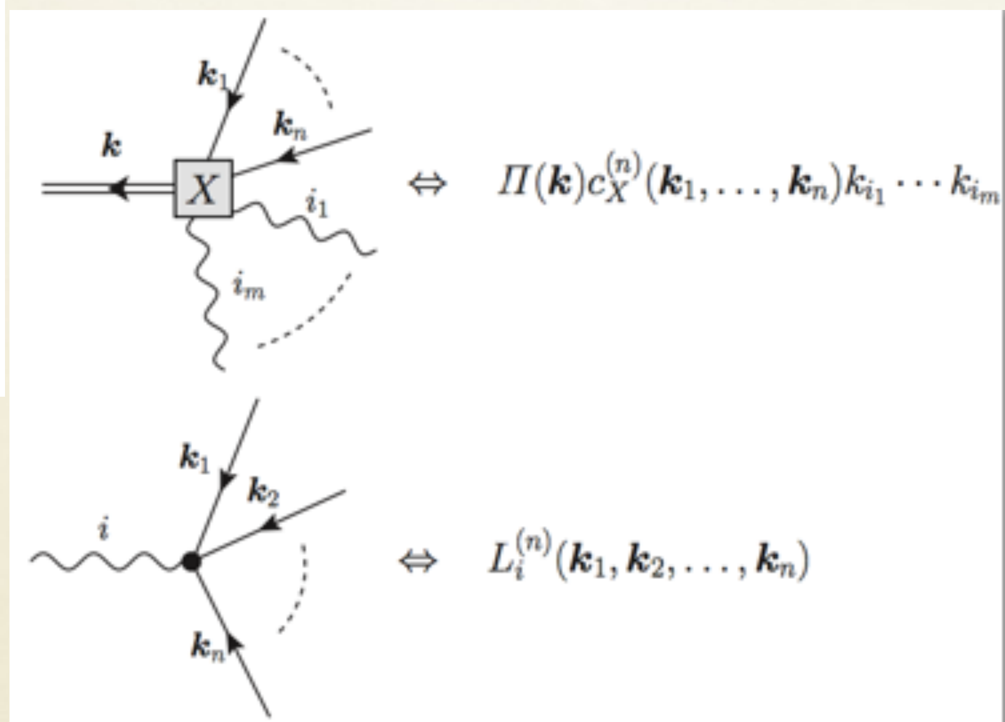
図形的方法

初期スペクトル

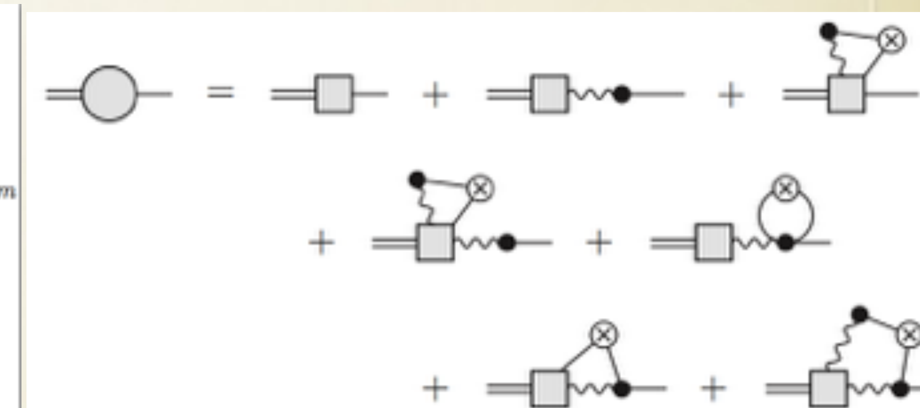


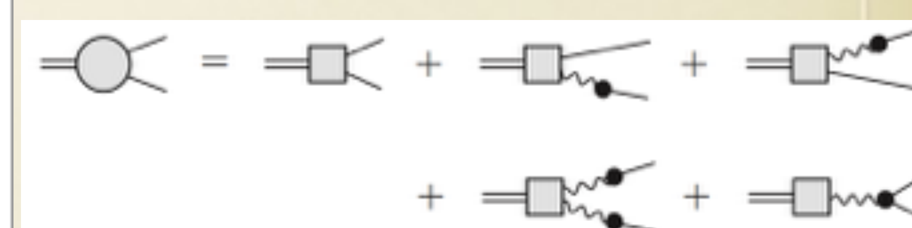
力学的進化とバイアス

+ resummation

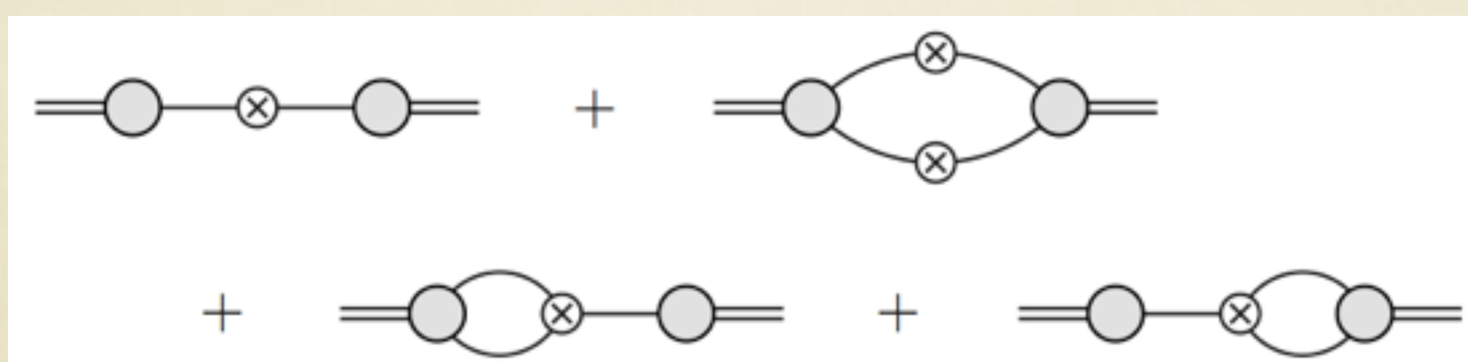


Propagators





$P(\boldsymbol{k}) =$



RSD and nG included

くり込まれたバイアス関数

- くり込まれたバイアス関数 (TM 2011)
  - Renormalized bias functions
  - 非局所バイアスを特徴づける重要な関数群

$$c_n^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_n) = (2\pi)^{3n} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\langle \frac{\delta^n \delta_{\mathrm{X}}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k})}{\delta\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1) \cdots \delta\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_n)} \right\rangle,$$

  - ラグランジュ空間におけるバイアスの頂点くり込み関数（多点プロパゲータ）に対応

$$\left\langle \frac{\delta^n \delta_{\mathrm{X}}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k})}{\delta\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1) \cdots \delta\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_n)} \right\rangle = (2\pi)^{3-3n} \delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}_{1\cdots n} - \boldsymbol{k}) c_n^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_n). \quad (4)$$

- 摂動論に基づく非線形力学進化には理論的な不定性はない（非線形領域へ外挿しなければ）
- バイアスの不定性は制御可能
  - 大スケールの振る舞いはバイアスの詳細にはよらない
  - 非線形領域へ行くほど、バイアスを正確に表すよいモデルが必要

くり込まれたバイアス関数のモデル計算１：PS theory に基づいたハローモデル

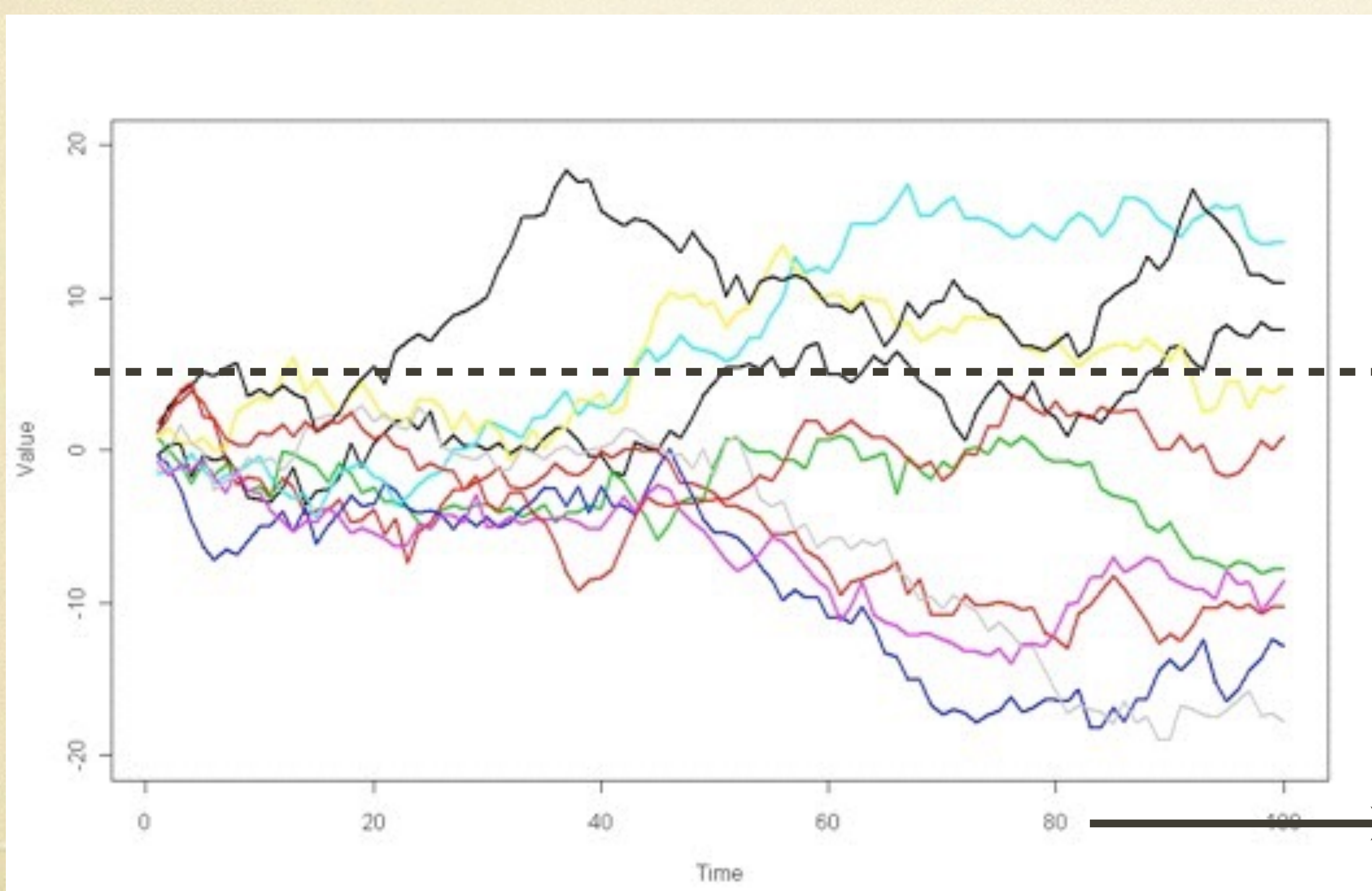
・ハローモデルの考え方を元にした簡単なモデルにおいて、くり込まれたバイアス関数を導出した結果：

$$c_1^{\mathrm{L}}(k) = b_1^{\mathrm{L}} W(kR) + \frac{1}{\delta_{\mathrm{c}}} \frac{\partial W(kR)}{\partial \ln \sigma_M}$$

$$c_2^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) = b_2^{\mathrm{L}} W(k_1 R) W(k_2 R) + \frac{\delta_{\mathrm{c}} b_1^{\mathrm{L}} + 1}{\delta_{\mathrm{c}}^2} \frac{\partial}{\partial \ln \sigma_M} [W(k_1 R) W(k_2 R)]$$

bias nonlocality

δ_M



δ_{c}

$1/R$

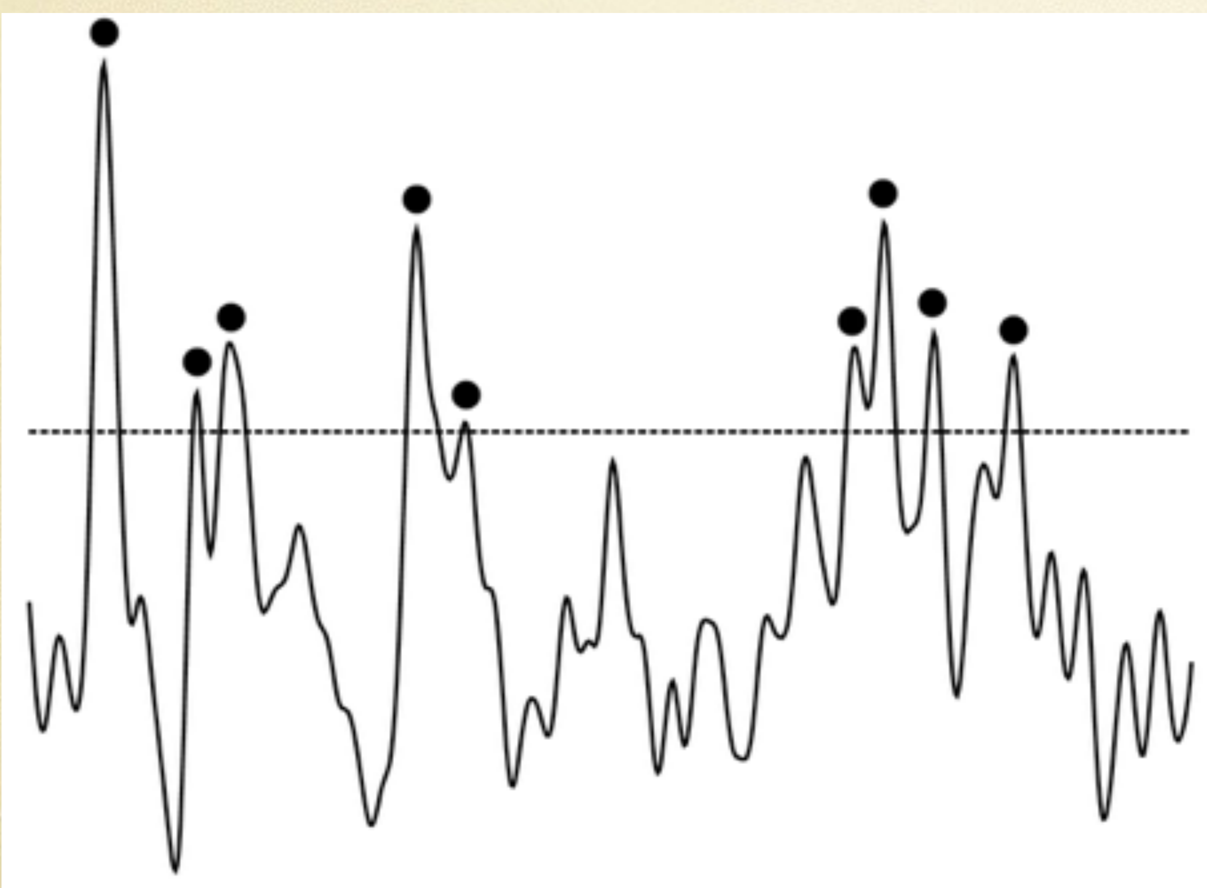
ハローモデル：
質量スケールで平均したゆらぎが臨界値を上回ったらその質量スケールの天体が形成されたと考える

くり込まれたバイアス関数のモデル計算：２
Peaks モデル

・ある質量スケールでスムージングした密度ゆらぎのピークが天体になっている
　というピーク・モデルにおいて、くり込まれたバイアス関数を導出した結果：

$$c_1^{\mathrm{L}}(k) = W(kR)\left[b_{10} + b_{11}k^2\right]$$

$$c_2^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) = W(k_1R)W(k_2R)\Big\{b_{20} + b_{11}\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) + b_{02}{k_1}^2{k_2}^2 - 2\chi_1(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{k}_2) + \omega_{10}\left[3(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{k}_2)^2 - {k_1}^2{k_2}^2\right]\Big\}$$



$$b_{ij} \equiv \frac{1}{{\sigma_0}^i{\sigma_2}^j\bar{n}_{\mathrm{pk}}} \int d^{10}y\, n_{\mathrm{pk}} H_{ij}(\nu, J_1)\mathcal{P},$$

$$\chi_k \equiv \frac{(-1)^k}{{\sigma_1}^{2k}\bar{n}_{\mathrm{pk}}} \int d^{10}y\, n_{\mathrm{pk}} L_k^{(1/2)}\left(\frac{3}{2}\eta^2\right)\mathcal{P},$$

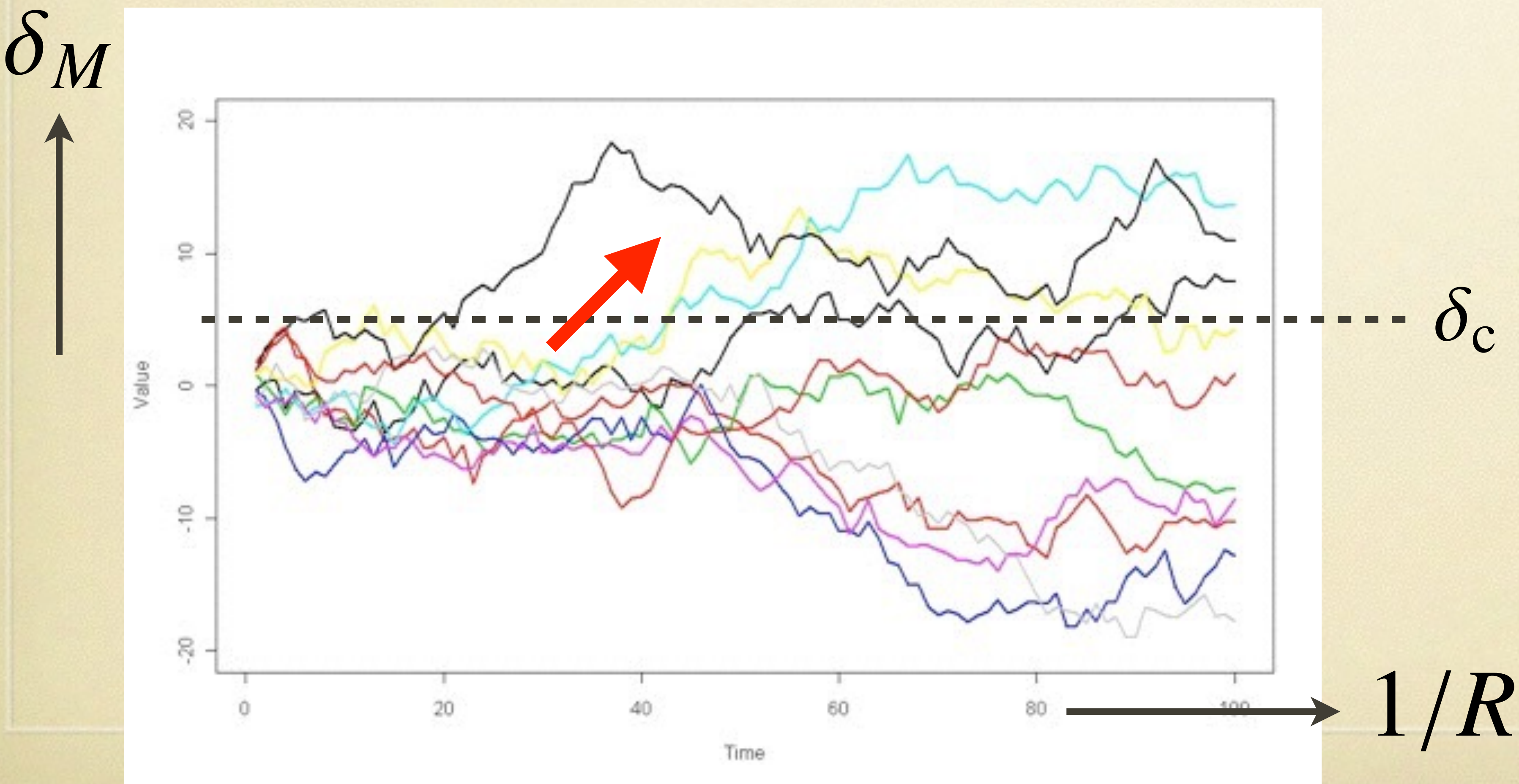
$$\omega_{l0} \equiv \frac{(-1)^l}{{\sigma_2}^{2l}\bar{n}_{\mathrm{pk}}} \int d^{10}y\, n_{\mathrm{pk}} L_l^{(3/2)}\left(\frac{5}{2}J_2\right)\mathcal{P}.$$

$$n_{\mathrm{pk}} = \frac{3^{3/2}}{{R_*}^3}\delta_{\mathrm{D}}(\nu - \nu_{\mathrm{c}})\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{\eta})\Theta(\lambda_3)\left|\det \boldsymbol{\zeta}\right|,$$

くり込まれたバイアス関数のモデル計算：3
Excursion Set Peaks モデル

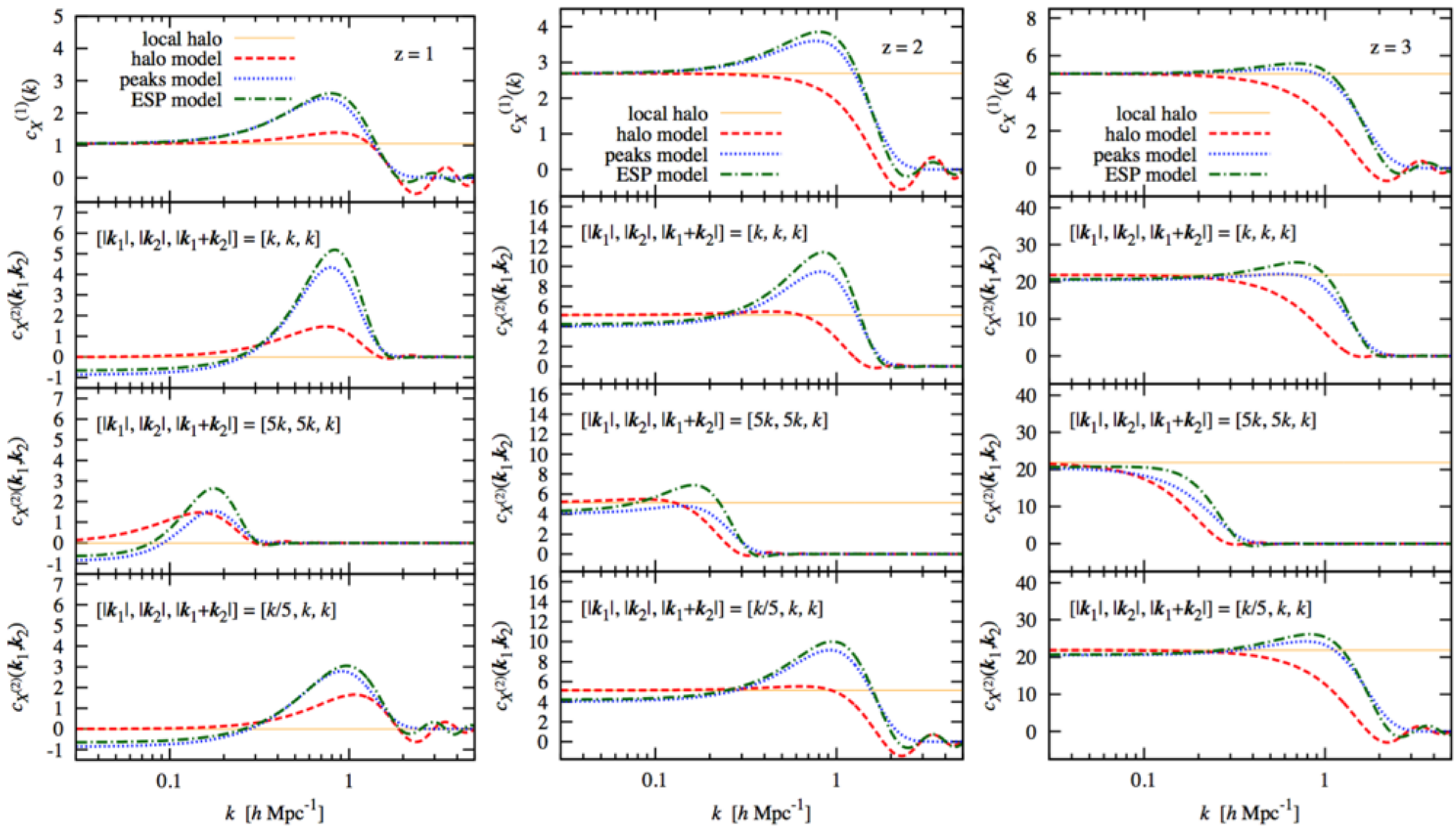
・ハローモデルとピーク理論の考え方を組み合わせたExcursion Set Peaks (ESP) モデルにおいて、くり込まれたバイアス関数を導出した結果：

$$
\begin{aligned}
c_X^{(1)}(k) &= b_{100}W(kR) + b_{010}k^2\bar{W}(k\bar{R}) - b_{001}kW'(kR),\\
c_X^{(2)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) &= b_{200}W(k_1R)W(k_2R) + b_{110}\left[{k_2}^2W(k_1R)\bar{W}(k_2\bar{R}) + (1\leftrightarrow 2)\right]\\
&\quad + \left\{b_{020}{k_1}^2{k_2}^2 + \omega_{10}\left[3(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)^2 - {k_1}^2{k_2}^2\right] - 2\chi_1(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)\right\}\bar{W}(k_1\bar{R})\bar{W}(k_2\bar{R})\\
&\quad - b_{101}\left[k_1W'(k_1R)W(k_2R) + (1\leftrightarrow 2)\right] - b_{011}\left[k_1{k_2}^2W'(k_1R)\bar{W}(k_2\bar{R}) + (1\leftrightarrow 2)\right] + b_{002}k_1k_2W'(k_1R)W'(k_2R),
\end{aligned}
$$

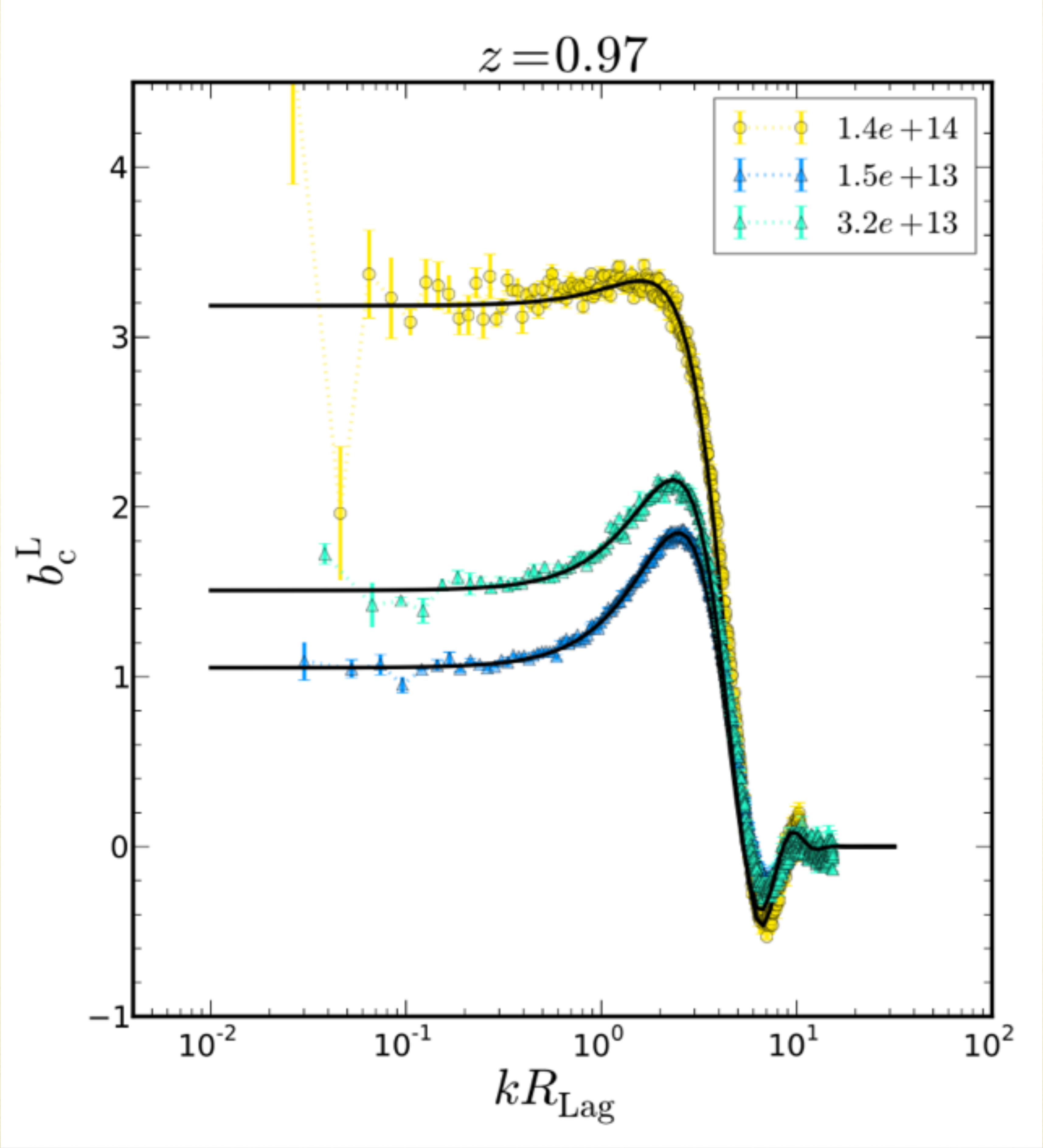


Peaksモデルに Excursion set theory (Press-Schechter理論の拡張)を組み合わせてup-crossing条件を取り入れたモデル：最近注目
Apple&Jones1990, Desjacques2013, Paranjape&Seth2013, Gong, Biagetti, Riotto,⋯.

Renormalized bias functions

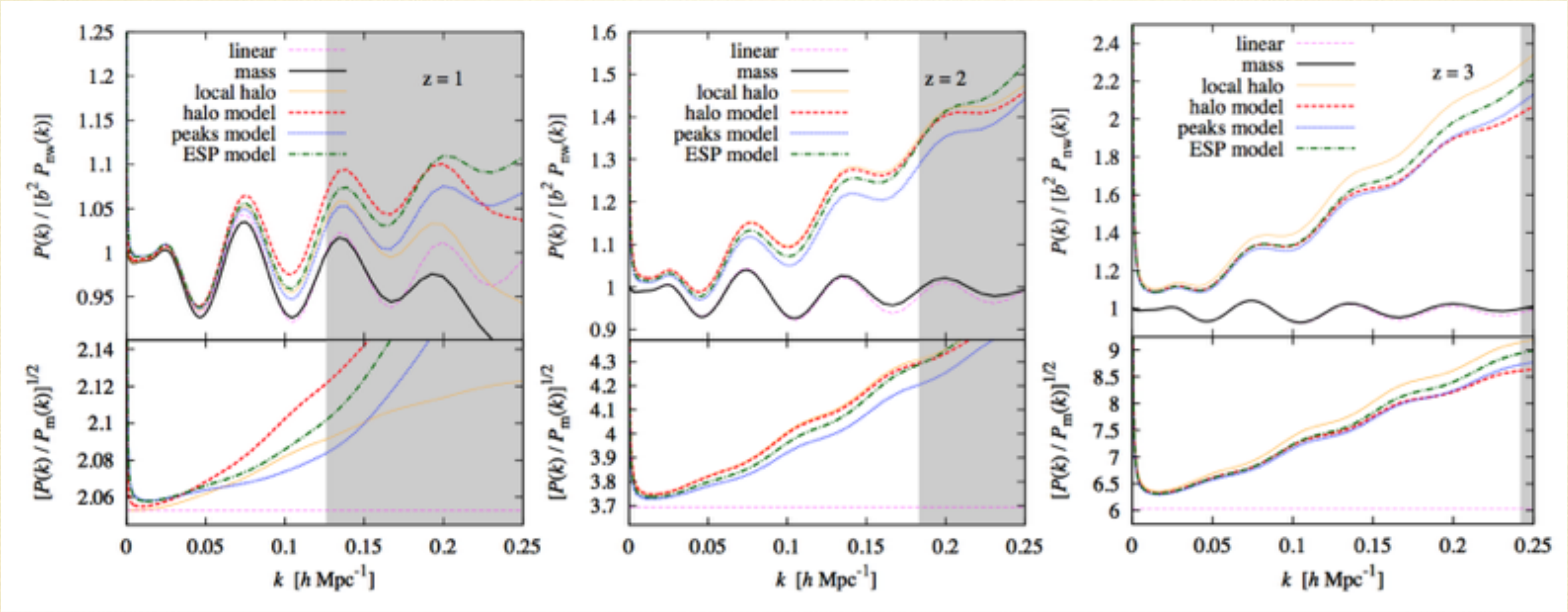


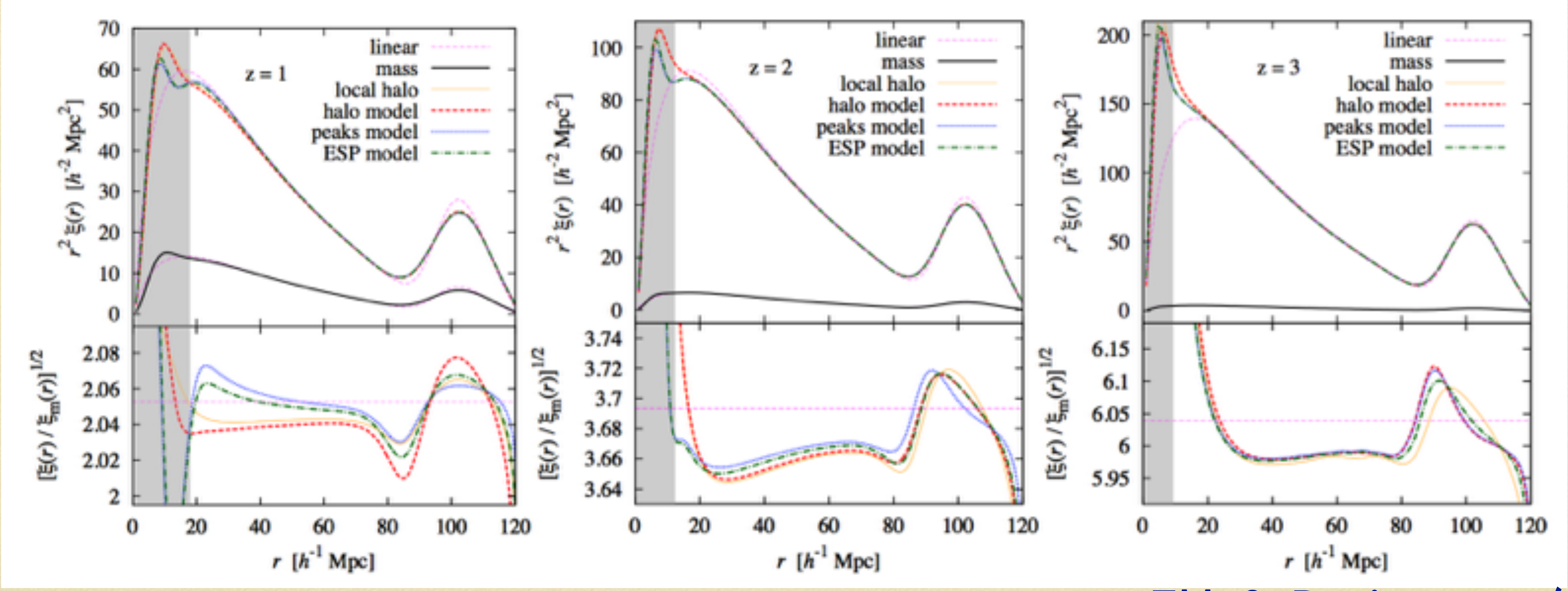
TM & Desjacques (2016)



Chan+ (2016)

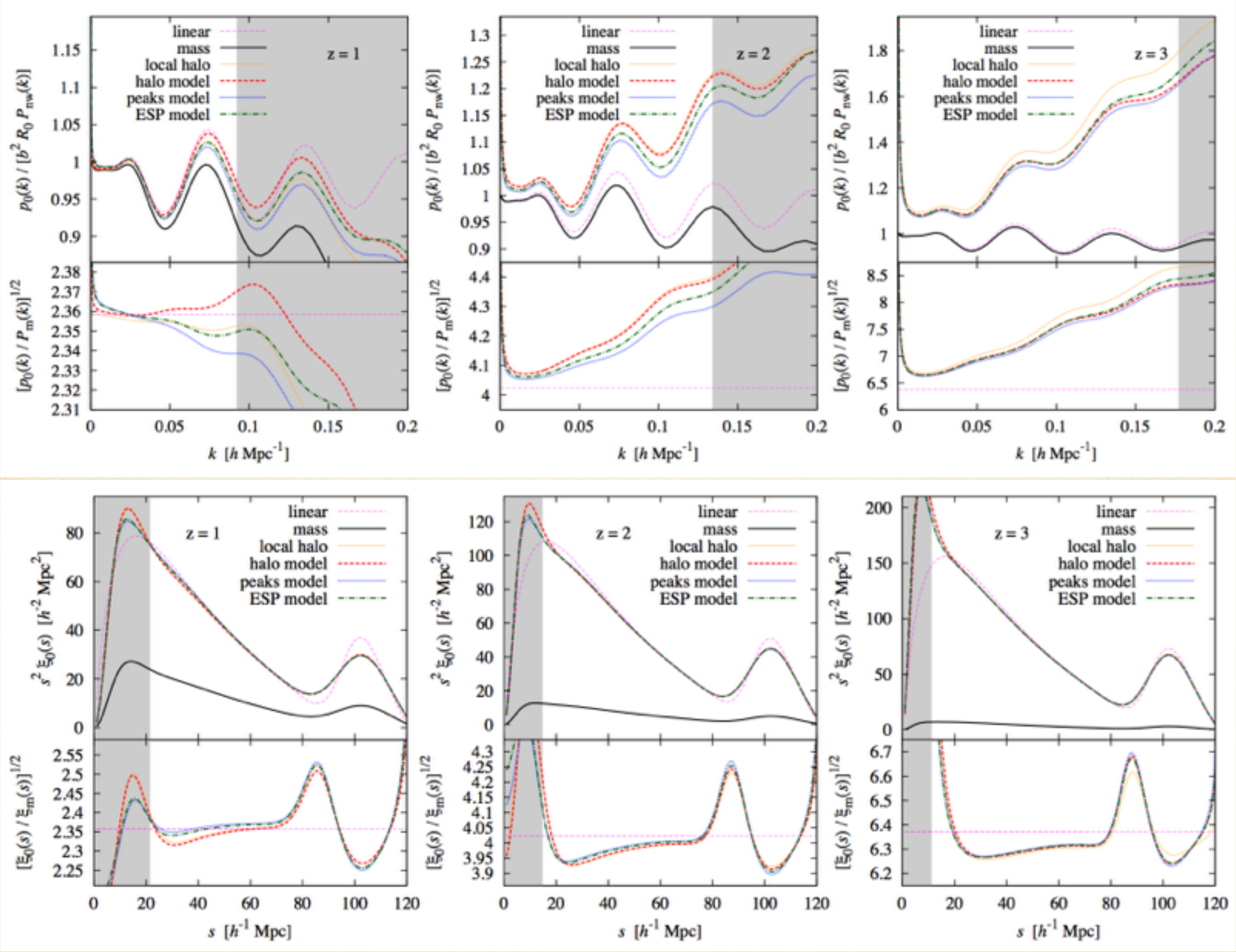
Power spectra & correlation functions





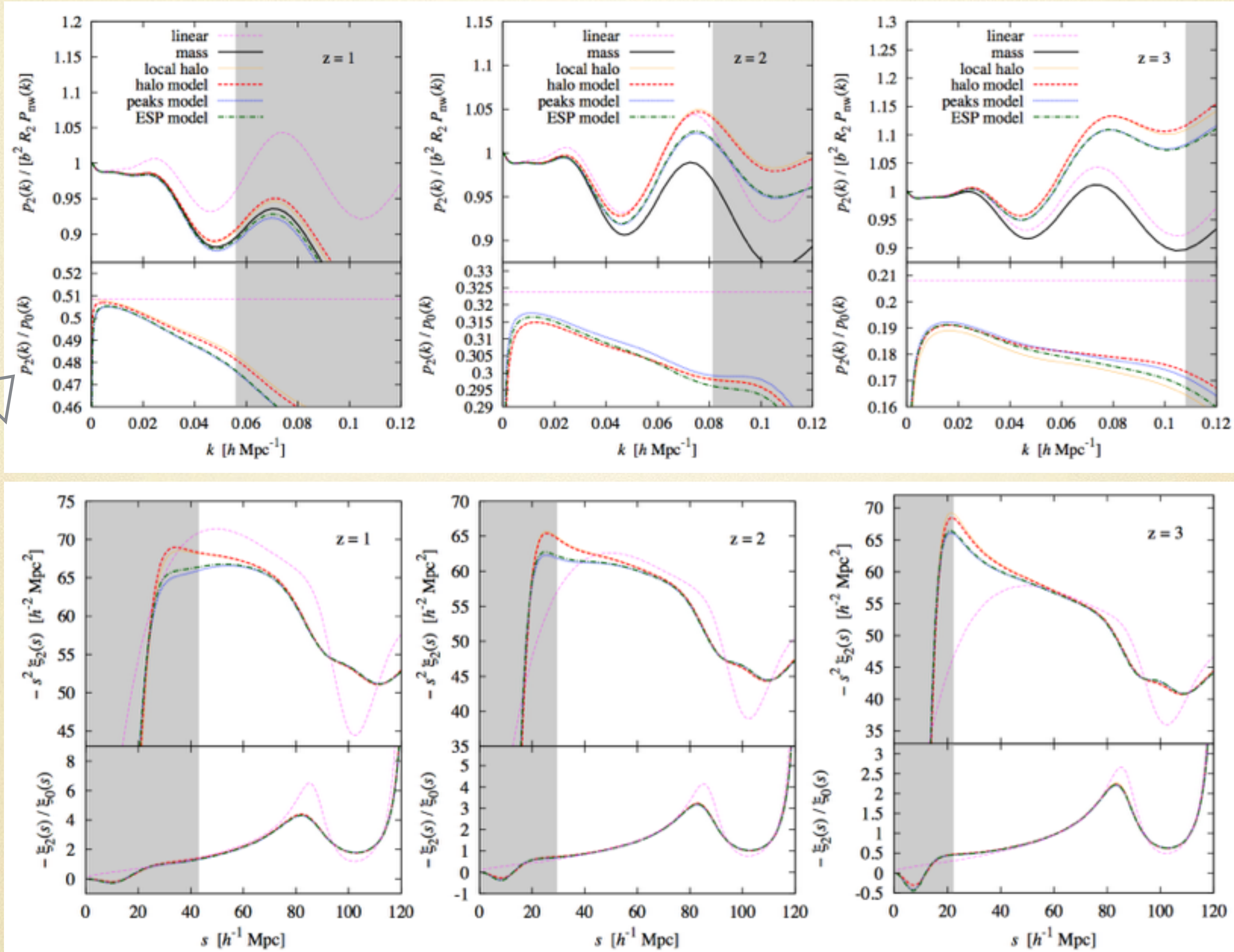
TM & Desjacques (2016)

Redshift space, monopole



TM & Desjacques (2016)

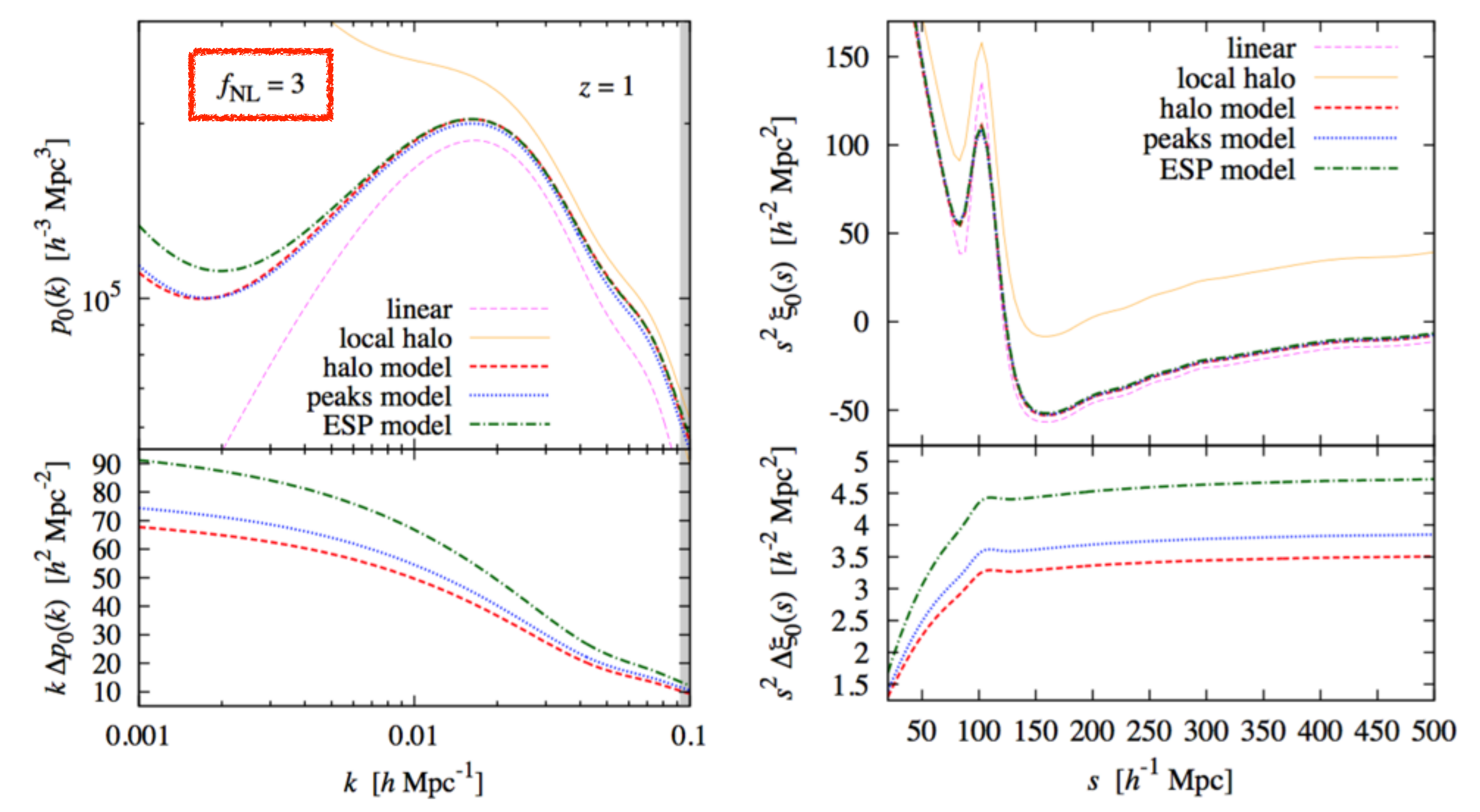
Redshift-space distortions, quadrupole



$f\,\sigma_8$

TM & Desjacques (2016)

Primordial non-Gaussianity



TM & Desjacques (2016)

結論

- バイアス・モデル依存性
  - 摂動領域のパワースペクトルは、バイアスのモデルに２－４パーセント程度のレベルで依存
  - 相関関数(r>20Mpc/h)は、１パーセント以下の依存性
- このレベルを超えた精密宇宙論には、バイアスの正確なモデル化が必要
  - 用いる天体の種類ごとに異なる

- 終わり