2017年4月26日 於　神戸大

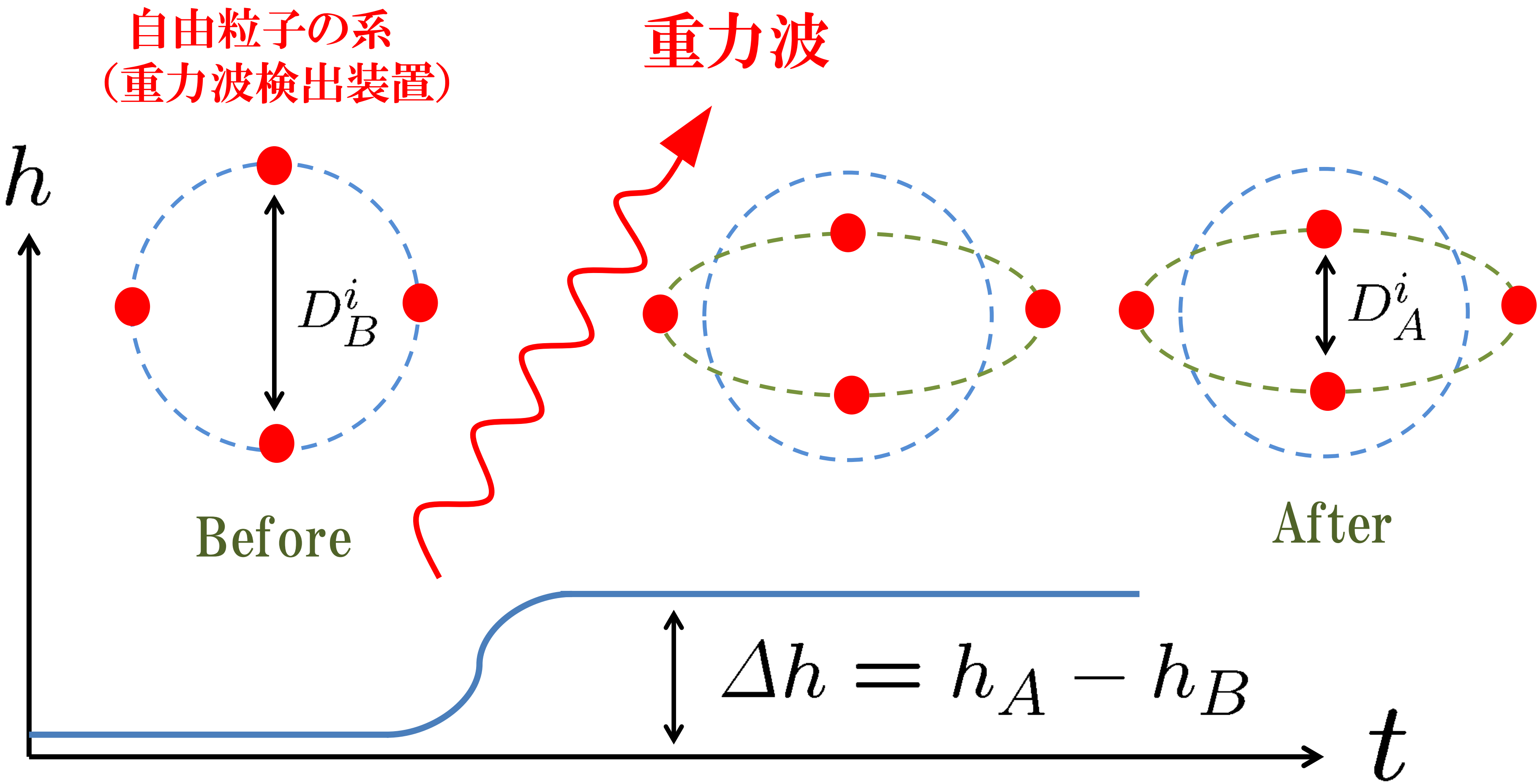
BMS 対称性と重力波メモリー

石橋　明浩
近畿大学理工

1612.03290　w/ S. Hollands and R.M. Wald
1702.00095　D. Garfinkle and A. Tolish

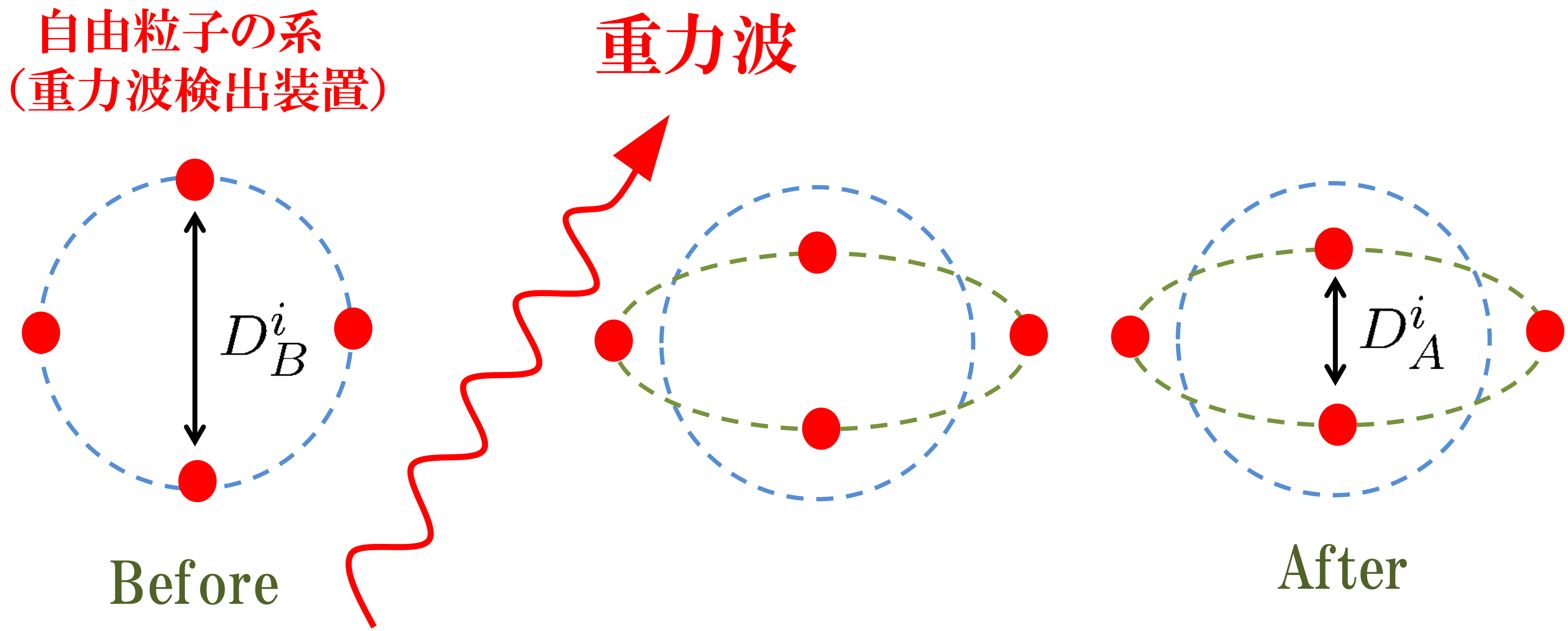
メモリー効果

輻射バーストの通過に伴う自由粒子系の配置変化が元に戻らずいつまでも残る現象



メモリー効果

輻射バーストの通過に伴う自由粒子系の
配置変化が元に戻らずいつまでも残る現象

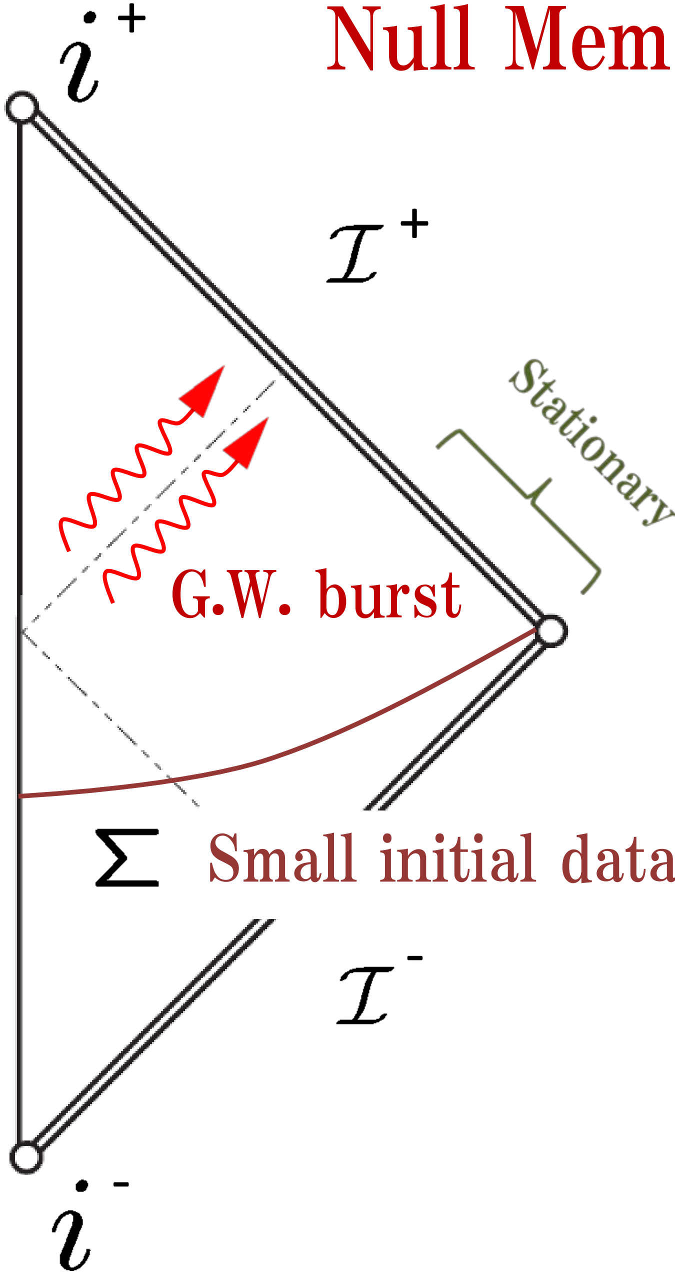


$$\Delta h_{ij}{}^{\mathrm{TT}} = \frac{1}{r}\Delta \sum_a \frac{4M_a}{\sqrt{1-v_a^2}}\left(\frac{v_a^i v_a^j}{1-v_a\cos\theta}\right)^{\mathrm{TT}}$$

2つのメモリー効果

Null Memory　(c.f. 非線形メモリー)

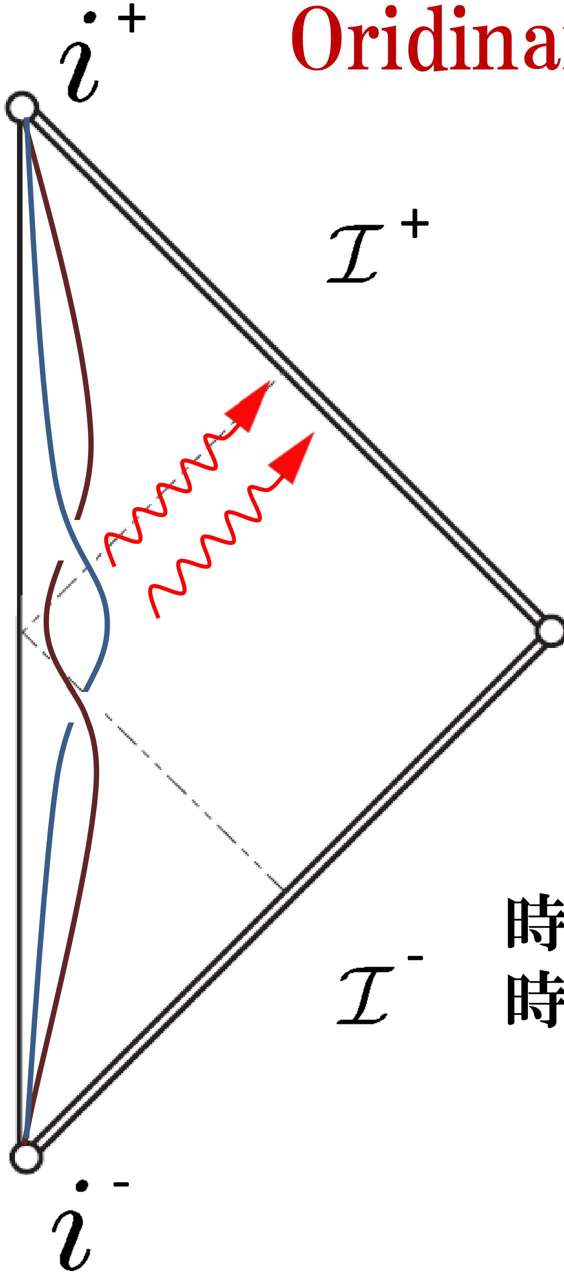
Christodoulou 91



エネルギー・運動量は
輻射によって運ばれる

Oridinary Memory (c.f. 線形メモリー)

Zel'dovich-Polnarev 74



エネルギー運動量のほとんどは
物質によって運ばれる

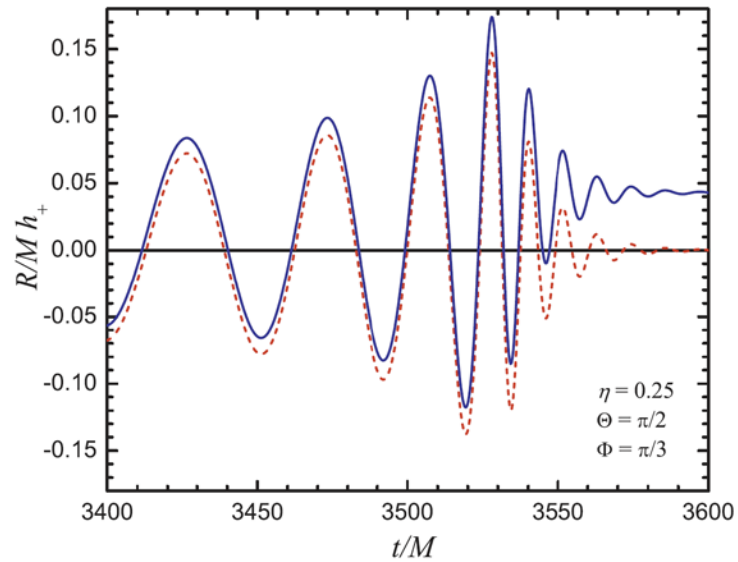
時間的過去の無限遠 i^- から
時間的未来の無限遠 i^+ へ向かう天体など

なぜ興味があるのか　1

I. メモリー効果 ⇒ 検出可能性

LISA
超大質量ブラックホールの
合体からの重力波 $z \leq 2$

e.g. Favata '10



DECIGO
GRBjet からの重力波

e.g. Sago Ioka Nakamura Yamazaki '04

なぜ興味があるのか　2

II.　BMS 対称性　と　Soft graviton

Memory,
BMS supertranslations, and Soft theorems

Strominger ’14, Strominger-Zhiboedov ‘15

BMS supertranslations, and Black hole’s soft hair

Hawking-Perry-Strominger ‘16

高次元では　メモリー効果はあるのか?

No Memory in GR in HD

1. 具体的な計算例　　1702.00095
2. 一般的場合の解析　1612.03290

1. 具体的な計算例

1702.00095
Garfinkle-Hollands-AI-Tolish-Wald

Minkowski 時空の摂動 $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$

アインシュタイン方程式＋ゲージ条件

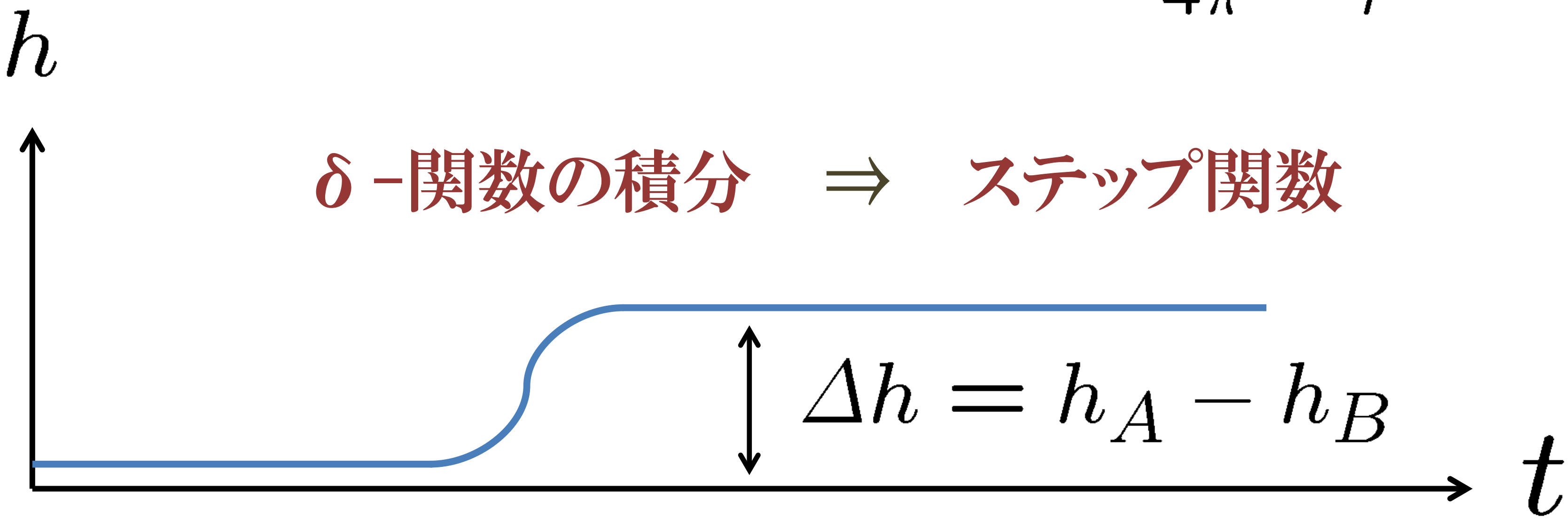
$$\nabla^c \nabla_c h_{ab} = 16\pi \underline{S_{ab}}$$

源項

$$h_{ab}(\mathbf{x}) = 16\pi \int d^D\mathbf{x}' \underline{G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} S_{ab}(\mathbf{x}'))$$

グリーン関数

$D=4$ グリーン関数の形 $G \sim \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\delta(t-r)}{r}$



測地線偏差の式 $$\frac{d^2}{dt^2}D^i = \underline{R_{titj}}D^j$$

摂動 h_{ab} に対する曲率テンソル

➡ 位置変化 $$\Delta D^i = \frac{1}{2}\Delta h_{ij}{}^{\mathrm{TT}} D^j$$

$D > 4$ （偶数次元）

Leading-order term は　δ -関数の微分.

$D = 6$ $$G \sim \frac{\delta'(u)}{r^2} + \frac{\delta(u)}{r^3}$$

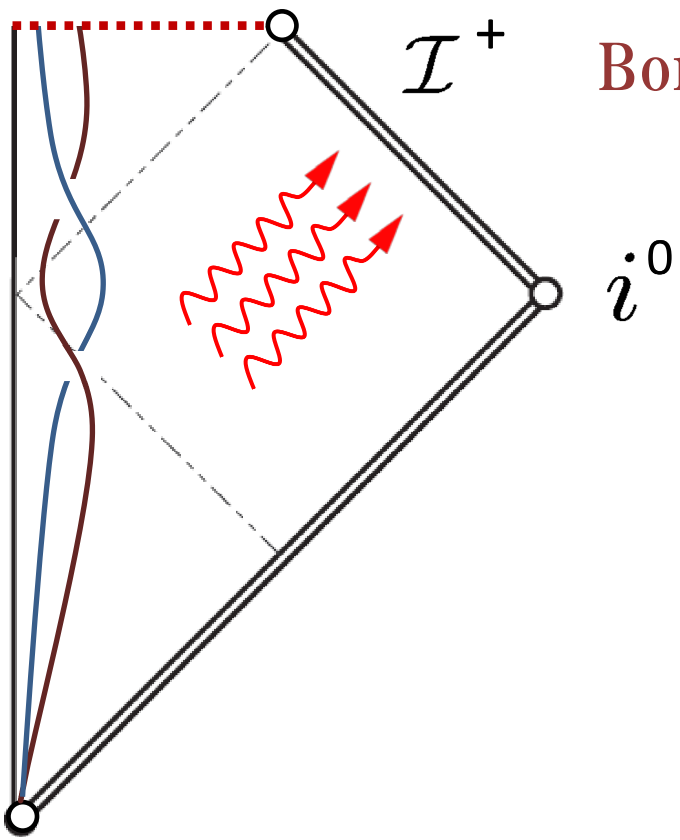
$D = 8$ $$G \sim \frac{\delta''(u)}{r^3} + 3\frac{\delta'(u)}{r^4} + 3\frac{\delta(u)}{r^5}$$

積分をしても、輻射と同じオーダーでは
ステップ関数は現れない.

⇒ メモリー効果はない

2. 一般的場合の解析　1612.03290　Hollands-AI-Wald

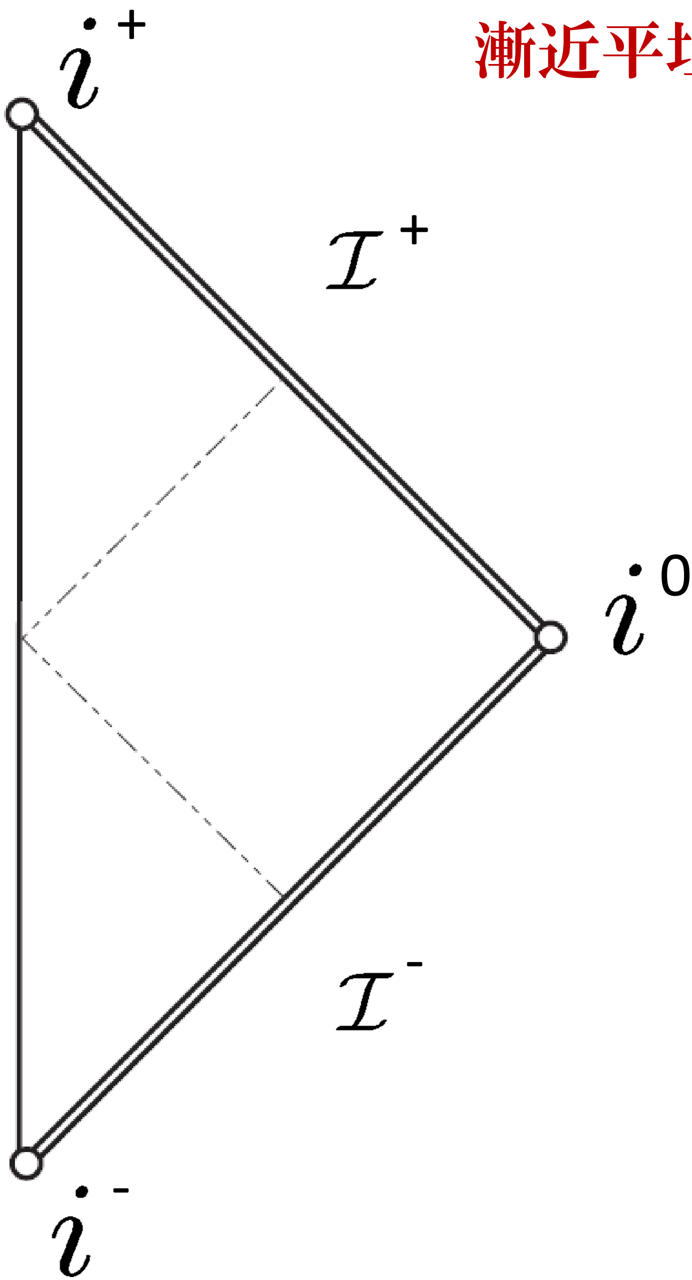
漸近平坦性を定義する



Bondi energy
　- defined at null infinity

ADM energy
　- defined at spatial infinity

漸近平坦時空の共形図



$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

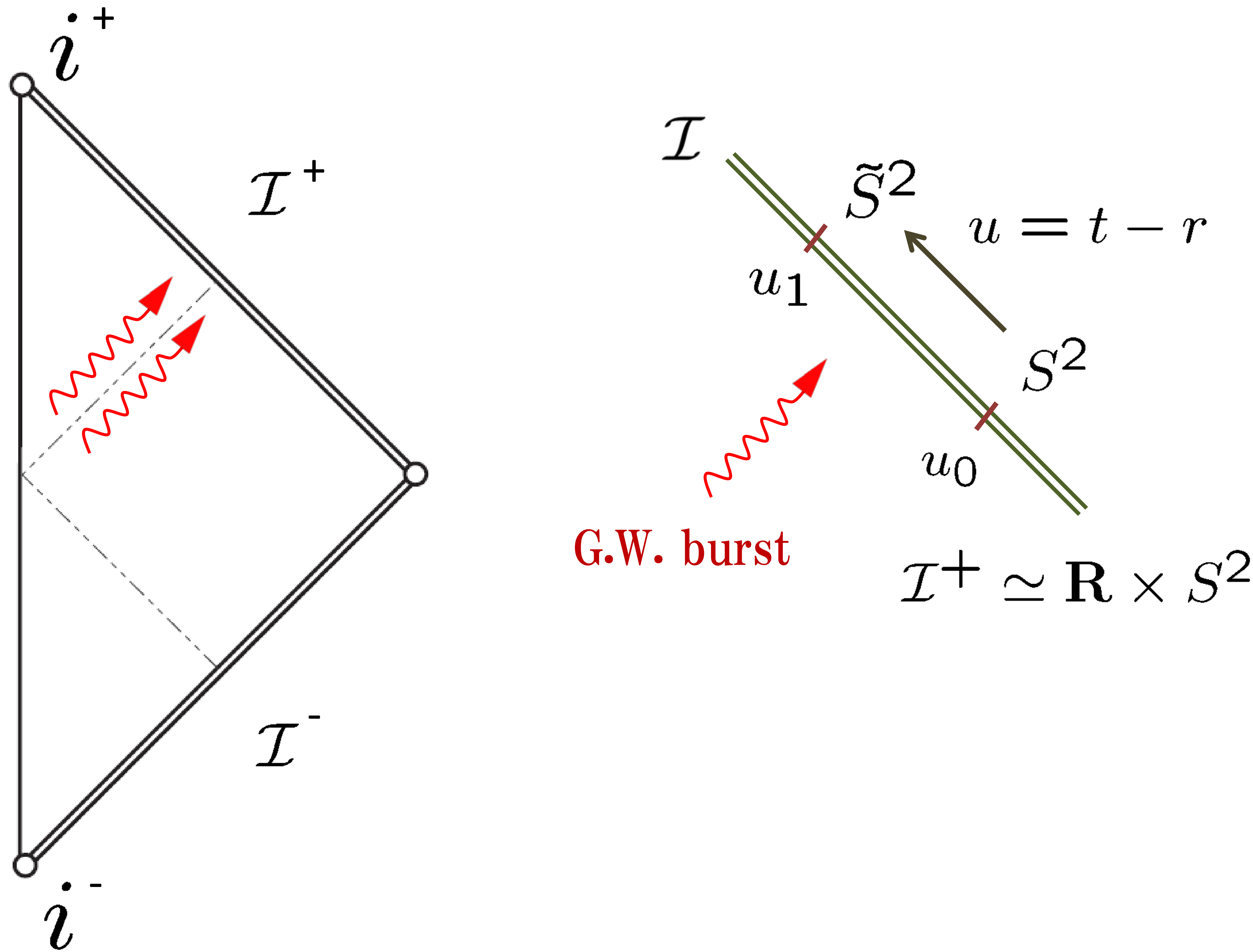
g_{ab} ：物理的な時空計量

$\tilde{g}_{ab}$ ：コンパクト化のために導入した非物理的計量

於　光的無限遠　$\mathcal{I}$

$$\begin{cases} \Omega \to 0 \quad \text{滑らか} \\ \tilde{\nabla}_a \Omega \neq 0 \\ \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \Omega \tilde{\nabla}_b \Omega = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{I} \simeq \mathbf{R} \times S^2$$



i^+
$\mathcal{I}^+$
$\mathcal{I}^-$
i^-
$\mathcal{I}$
$\tilde{S}^2$
$u = t - r$
u_1
S^2
u_0
G.W. burst
$\mathcal{I}^+ \simeq \mathbf{R} \times S^2$

漸近平坦時空の漸近対称性 Asymptotic Symmetry

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

時空内部の対称性

$$\pounds_X g_{ab} = 0$$

X^a Killing vector

光的無限遠方での漸近対称性

$$\Omega^2 \pounds_X g_{ab} = 0 \quad \text{於} \quad \mathcal{I}$$

$\tilde{X}^a = X^a$ は、必ずしも物理的計量に対する Killing vector である必要はない。

どの様な速さで $\Omega^2 \pounds_X g_{ab} \to 0$ となるべきかは、$\mathcal{I}$ での境界条件で決まる。

漸近平坦時空の漸近対称性 Asymptotic Symmetry

Minkowski 時空の例： $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}$

時空内部の対称性

Poincare 対称性

10 パラメーター

- 並進対称性
  4
- ローレンツ変換
  6

光的無限遠方での漸近対称性

BMS 対称性

無限次元の群

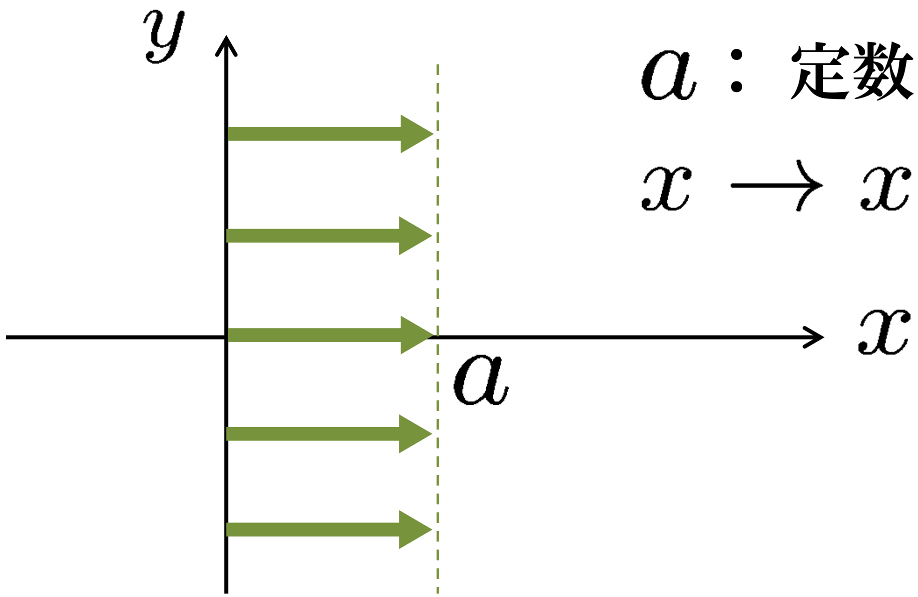
- Super translations

$$\mathbf{X} = T(\theta, \phi) \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \cdots$$

  - $\mathcal{I}$ の光的生成子をその上へ移す
  - 角度依存並進

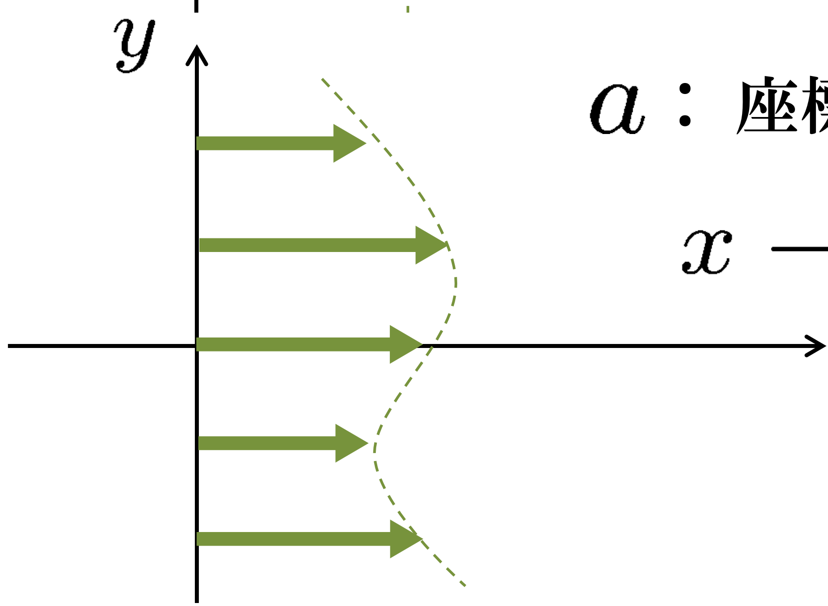
- ローレンツ群
  $\sim$ BMS/supertranslations

2次元平面の例



a： 定数

$x \rightarrow x + a$ は並進対称性



a： 座標の関数のとき

$x \rightarrow x + a$ は対称性にならない

$D=4$ BMS Supertranslations

（角度依存を許す並進対称性）

- Generator： $X^a = T(z)\tilde{\nabla}^a\Omega - \Omega\tilde{\nabla}^a T(z)$

  $T(z)$ ： S^2上の球面調和関数で $\ell \geq 2$ となるもの

  (c.f. $\ell = 0,\ 1 \Rightarrow$ $\mathbf{X}$ ： translations)

- Displacement tensor： $\Delta_A{}^B = -\left(D_A D^B - \frac{1}{2}\delta_A{}^B D^c D_C\right) T(z)$

- Displacement： $\Delta D^B = \frac{1}{r}\Delta_A{}^B D^A$

漸近対称性 X^a は、$\Omega^2 \pounds_X g_{ab} \to 0$ となる速さ、

i.e. 光的無限遠での境界条件で規定される

光的無限遠での漸近平坦性をどのように定義すべきか？

光的無限遠での漸近平坦性をどのように定義すべきか？

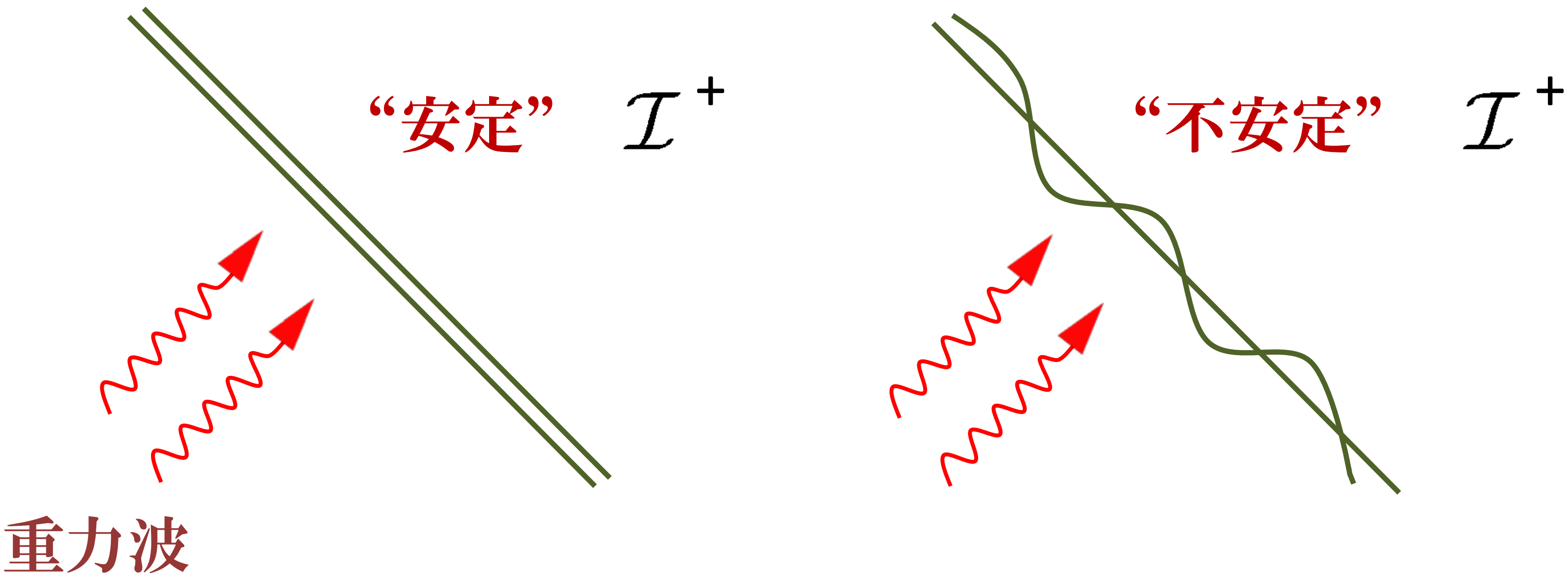
I.　漸近条件（境界条件）は**十分に一般的**であるべき

⇒ 重力波などのダイナミクスを許す程度
には一般的な条件設定にする

II.　漸近条件（境界条件）は**十分に強いもの**であるべき

⇒ エネルギーなどの物理量が良設定となる
ようにある程度の対称性を許す程度には
強い条件設定にする

光的無限遠方の安定性



- 光的無限遠方 $\mathcal{I}$ は、重力波による摂動のもとでも
  正則な光的超曲面でありつづけるべき

非物理的計量に対する摂動 $\delta\tilde{g}_{ab} = \Omega^2\delta g_{ab}$ が $\mathcal{I}$ へ
滑らかに拡張されるべき

$D = 4$ の場合 ⇒ 安定： Geroch – Xanthopoulos '78

光的無限遠での境界条件 1 （線形摂動）

高次元（偶数）$D>4$

線形摂動に対する条件

$$\delta\tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{(d-2)/2})$$

$$\delta\tilde{g}_{ab}\tilde{\nabla}^a\Omega = O(\Omega^{d/2})$$

$$\delta\tilde{g}_{ab}\tilde{\nabla}^a\Omega\tilde{\nabla}^b\Omega = O(\Omega^{(d+2)/2})$$ ⟸ 光的

$$\tilde{g}^{ab}\delta\tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{d/2})$$ ⟸ $D>4$ に特有

Hollands-AI 05

証明：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{TT ゲージ} \\ \\ \text{変数の選び方}\quad \phi_\alpha\text{：}\end{array}\right.$$

$$\tau_{ab} := \Omega^{-(D-2)/2}\delta\tilde{g}_{ab} \qquad \tau_a := \Omega^{-1}\tau_{ab}\tilde{\nabla}^b\Omega$$

真空のアインシュタイン方程式は次の双曲型方程式に帰着する：

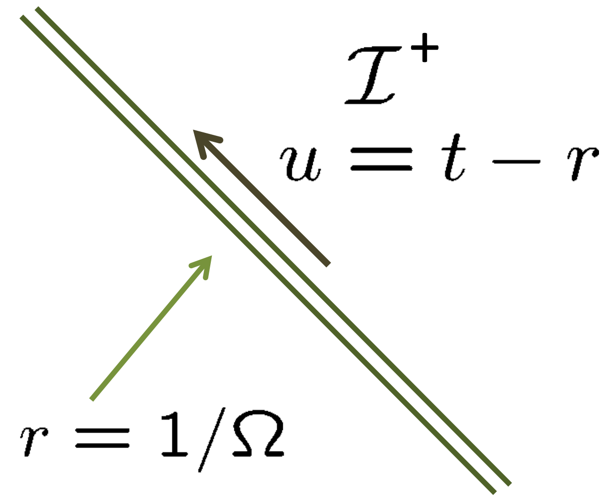
$$\tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}_c\phi_\alpha = A_\alpha{}^{\beta a}\tilde{\nabla}_a\phi_\beta + B_\alpha{}^\beta\phi_\beta$$

この方程式は先述の境界条件のもとで良設定の初期値問題

$\Rightarrow$ ϕ_α が $\mathcal{I}^+$ 上へと滑らかな拡張を持つことを保証 $\square$

光的無限遠での境界条件　２（高次も含めた条件）

$\mathcal{I}$ 近傍での光的ガウシアン座標
(GNC: Gaussian Null coordinates)



幾何学的に構成可能：　必ず張れる

$$\tilde{g} = 2du(d\Omega - \Omega^2 \alpha du - \Omega \beta_A dz^A) + \gamma_{AB} dz^A dz^B$$

u　：　遅延時間座標

z^A：　断面 S^2　上の角度座標

$r = \dfrac{1}{\Omega}$　：光的測地線のアフィン助変数

$$g = -2du(dr + \alpha du + r\beta_A dz^A) + r^2 \gamma_{AB} dz^A dz^B$$

c.f. Minkowski 時空の場合

$\alpha = 1/2, \quad \beta_A = 0$

光的無限遠での境界条件　２（高次も含めた条件）

$\mathcal{I}$ 近傍でGNC成分 $\alpha,\ \beta_A,\ \gamma_{AB}$ を $r = 1/\Omega$ についてべき展開

$$\alpha \sim \sum_{n\geq 0} \alpha^{(n)}\ r^{-n} \qquad \beta_A \sim \sum_{n\geq 0} \beta_A^{(n)}\ r^{-n} \qquad \gamma_{AB} \sim \sum_{n\geq 0} \gamma_{AB}^{(n)}\ r^{-n}$$

アインシュタイン方程式に代入し、係数間の関係を得る

高次も含めた境界条件

$$\alpha^{(0)} = 1/2 \qquad \beta_A^{(0)} = 0 \qquad \gamma_{AB}^{(0)} = s_{AB}$$

$$0 = \alpha^{(n)}\ , \quad 0 = \beta_A^{(n)}\ , \quad 0 = \gamma_{AB}^{(n)} \qquad \mathit{for} \quad 1 \leq n \leq (d-4)/2$$

$$\beta_A^{(n)} = -\frac{n}{(n+1)(d-2-n)} D^B \gamma_{AB}^{(n)} \qquad \mathit{for} \quad 1 \leq n \leq d-3$$

$$\alpha^{(n)} = \frac{n-1}{2n(d-3-n)} D^A \beta_A^{(n)} \qquad \mathit{for} \quad 1 \leq n \leq d-4$$

$$\gamma^{(n)} \equiv s^{AB}\gamma_{AB}^{(n)} = 0 \qquad \mathit{for} \quad 1 \leq n \leq d-3$$

Hollands-AI-Wald 16

我々の提案した境界条件は

⇒　光的無限遠の安定性を保証

⇒　輻射を許すほど十分に一般的

⇒　エネルギーが定義できるほど十分に強い

Bondi エネルギーは定義できるか？

― Noether 電荷の方法を応用　　Wald-Zoupas '00

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{16\pi} R \cdot \epsilon \\ \theta \ \text{：}(D-1)\text{-form} \quad \delta L = \mathrm{EOM} \cdot \delta g + \mathrm{d}\theta \\ \omega \ \text{： symplectic current} \end{cases}$$

$$\omega(\delta_1 g, \delta_2 g) = \delta_1 \theta(\delta_2 g) - \delta_2 \theta(\delta_1 g)$$

我々の境界条件のもとで、 ω は良設定

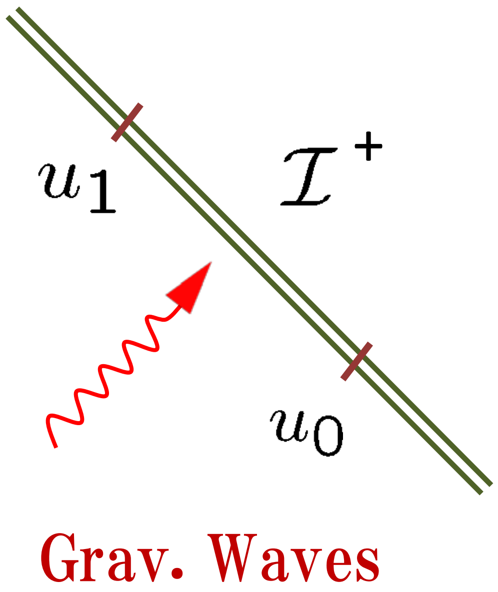
Supertranslations を許すと発散　　Hollands-AI 05

News tensor :

$$N_{ab} := \Omega^{-(D-4)/2} \times \text{(pull back of Schouten tensor)}$$

Flux formula :

$$\mathcal{H}_{\mathbf{X}}(u) = -\frac{1}{32\pi}\int_{S^{D-2}(u)} T N^{ab} N_{ab}$$



我々の境界条件のもとで、これらのエネルギー公式は良設定

我々の提案した境界条件は

⇒　光的無限遠の安定性を保証

⇒　輻射を許すほど十分に一般的

⇒　エネルギーが定義できるほど十分に強い

……… しかし Supertranslations は許さない

漸近平坦時空の漸近対称性 Asymptotic Symmetry

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

時空内部の対称性

$$\pounds_X g_{ab} = 0$$

X^a Killing vector

光的無限遠方での漸近対称性

$$\Omega^2 \pounds_X g_{ab} = 0 \quad \text{於} \quad \mathcal{I}$$

$\tilde{X}^a = X^a$ は、必ずしも物理的計量に対する Killing vector である必要はない。

どの様な速さで $\Omega^2 \pounds_X g_{ab} \to 0$ となるべきかは、$\mathcal{I}$ での境界条件で決まる。

光的無限遠での境界条件　1（線形摂動）

高次元（偶数）$D > 4$

線形摂動に対する条件

$$\delta\tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{(d-2)/2})$$

$$\delta\tilde{g}_{ab}\tilde{\nabla}^a\Omega = O(\Omega^{d/2})$$

$$\delta\tilde{g}_{ab}\tilde{\nabla}^a\Omega\tilde{\nabla}^b\Omega = O(\Omega^{(d+2)/2})$$ ⟸ 光的

$$\tilde{g}^{ab}\delta\tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{d/2})$$ ⟸ $D > 4$ に特有

Hollands-AI 05

$D>4$ BMS Supertranslations?

$D>4$ に特有の境界条件 $\tilde{g}^{ab}\delta\tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{d/2})$ を考えよう:

$X^a = T(z)\tilde{\nabla}^a\Omega - \Omega\tilde{\nabla}^a T(z)$ により生成される摂動が

上の境界条件を満たすためには

$$\tilde{g}^{ab}(\Omega^2 \pounds_X g)_{ab} \sim \Omega(D^A D_A + d - 2)T \overset{!}{=} O(\Omega^{d/2})$$

D_A : S^{D-2} 上の微分演算子

$T(z)$: $\ell = 1$ の球面調和関数でなければならない

（$\ell = 0$: $T = const.$ の場合も境界条件を満たす）

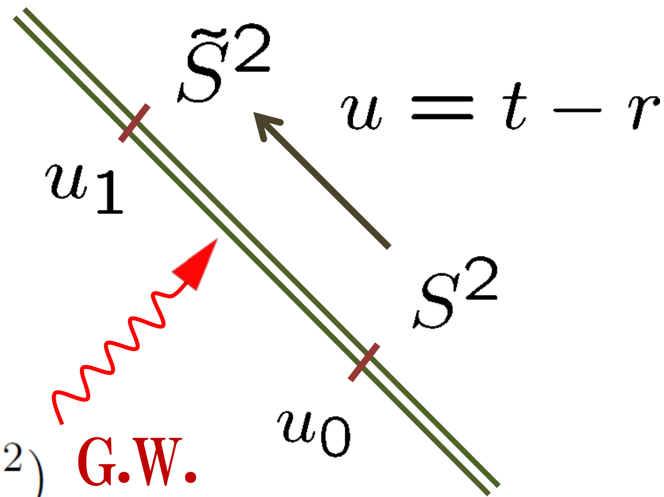
角度依存 $\ell \geq 2$ は許さない

$\ell = 0,\ 1$: d 個の独立な並進対称性のみ

メモリー効果と Supertranslations

べき展開解析より

$$\gamma^{(1)}_{AB}\Big|^{u>u_1}_{u<u_0} = 2\left(D_A D_B T - \frac{1}{2} s_{AB} D^C D_C T\right)$$



曲率テンソルは

$$R_{uAuB} = -\frac{1}{2} r^{3-d/2}\ \partial_u^2 \gamma^{(d/2-1)}_{AB} + O(r^{2-d/2})$$

測地線偏差の方程式 $(\tau^a \nabla_a)^2 \xi^b = -R_{acd}{}^b \tau^a \tau^d \xi^c$ を積分

$$\xi\Big|^{u>u_1}_{u<u_0} = r^{-d/2+1}\Delta(\xi)\Big|_{u<u_0} + O(r^{-d/2})$$

ここで displacement テンソルは

$$\Delta_{AB} = -(D_A D_B T - \tfrac{1}{2} s_{AB} D^C D_C T)$$

$4D$ と $D > 4$ の違い

輻射の振る舞い： $\sim \dfrac{1}{r^{(D-2)/2}}$

静的（クーロン的）部分の振る舞い： $\sim \dfrac{1}{r^{D-3}}$

$D = 4$ ➡ どちらも $\sim \dfrac{1}{r}$ ➡ 輻射と同じオーダーでのメモリー効果

$D > 4$ ➡ $1 < \frac{D-2}{2} < D - 3$ ➡ メモリー効果なし

まとめ

- $D=4$

  BMS Supertranslations を含む境界条件が必要

  $\Rightarrow$ S^2 上の任意の関数 $T(z)$で特徴づけ

- $T(z)$ は、メモリー効果の“ポテンシャル”

- $D>4$ $\Rightarrow$ 光的無限遠の安定性と

  エネルギーが良設定となる境界条件が必要

$\Rightarrow$ No Supertranslations $\Rightarrow$ No memory