

神戸大学工学部市民工学科

土質力学Ⅱ

金曜 1 & 2 限 (8:50-12:10)
授業資料_03

本日の内容

- 力のつり合い条件

空間的に分布する応力に要請される条件

- 地盤内応力分布の解

集中荷重に対するBoussinesq（ブシネスク）の解

解の重ね合わせ（積分）による

線荷重に対する解

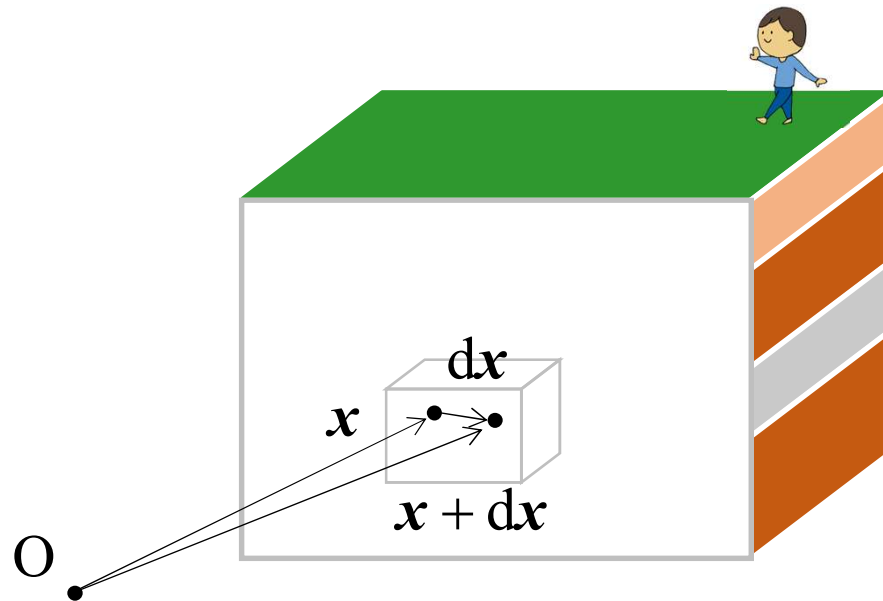
帯荷重に対する解

空間に分布する応力とつり合い条件

【要点1】 応力行列は、一般に、位置によって異なる

$$[\sigma(\boldsymbol{x})] \neq [\sigma(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})]$$

【要点2】 物体内の任意の領域について、作用する力がつり合っている



テイラー展開（数学的準備）

関数 f の点 a まわりでのテイラー展開

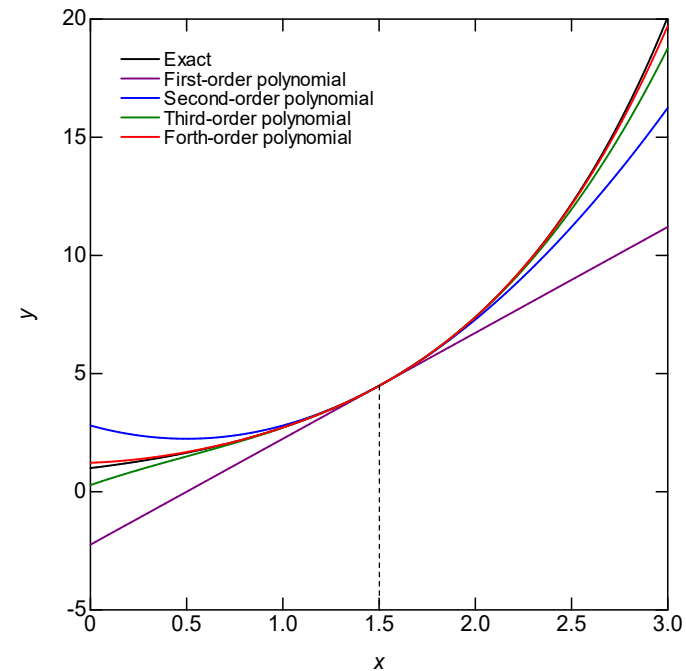
連続関数を多項式で表すための技法

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots$$

「点 a での関数 f の値 $f(a)$ 」と「点 a での微係数 $f^{(n)}(a)$ 」が分かっているならば、
「離れた点 x での関数 f の値 $f(x)$ 」を予測できる

例： $f(x) = e^x$ $x = 1.5$ まわりでのテイラー展開

高次項の微係数を考慮するほど、
より広い範囲の $f(x)$ を精度良く表現できる



テイラー展開（数学的準備）

関数 f の点 a まわりでのテイラー展開

連続関数を多項式で表すための技法

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots$$

上式の $\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow x + dx \\ x - a \rightarrow dx \\ a \rightarrow x \end{array} \right.$ と置き換えた表記：

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx + \frac{1}{2!}f''(x)(dx)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(dx)^3 + \dots$$

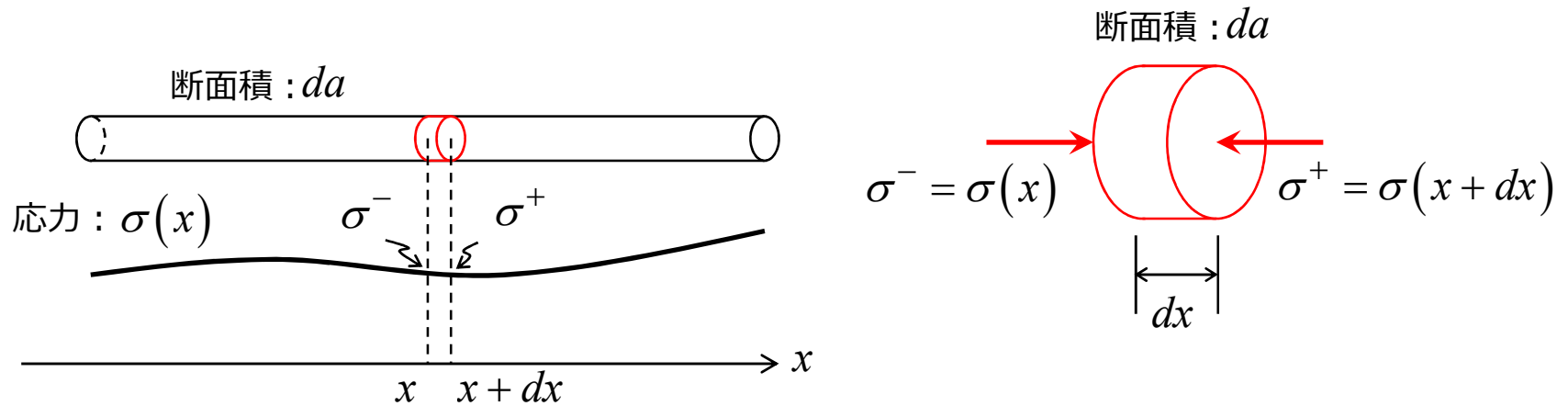
位置 $x + dx$ での関数 f の値を位置 x での値（導関数含む）によって表現

位置 x から位置 $x + dx$ までの関数 f の変化が「線形」と見做せるとき、つまり、テイラー展開の2次項以上の高次項を無視できる程度に dx が小さければ、

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$$

力のつり合い

1次元問題でのつり合い



微小要素に作用する力のつり合い

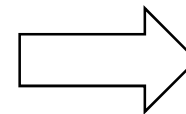
$$\sigma(x) \times da - \sigma(x + dx) \times da = 0$$

$x = x$ に作用する力 $x = x + dx$ に作用する力

Taylor 展開

$$\sigma(x) \times da - \left[\sigma(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right] \times da = 0$$

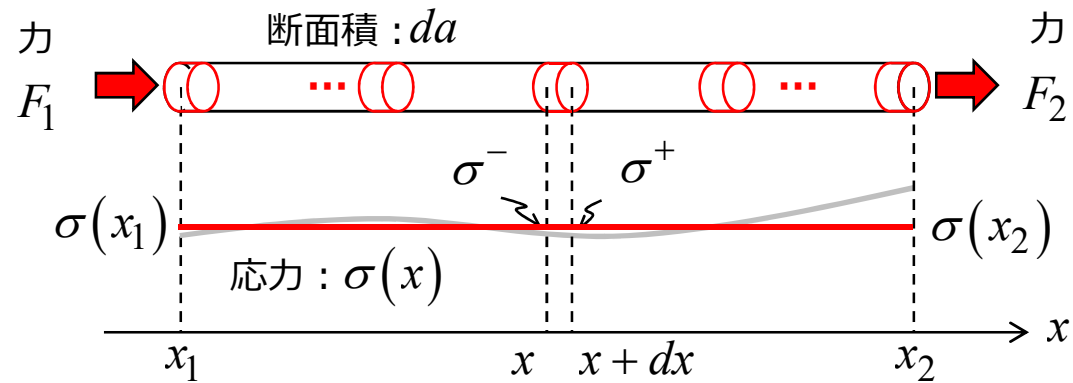
$x = x$ に作用する力 $x = x + dx$ に作用する力



$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

力のつり合い

1次元問題でのつり合い



微小区間でのつり合い

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

積分

$$\int_x^{x+dx} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = 0$$

- 連続する複数の微小要素すべてについて、つり合いが成り立つ

$$\int_{x_1}^{x_1+dx} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \dots + \int_x^{x+dx} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \dots + \int_{x_2-dx}^{x_2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = 0$$

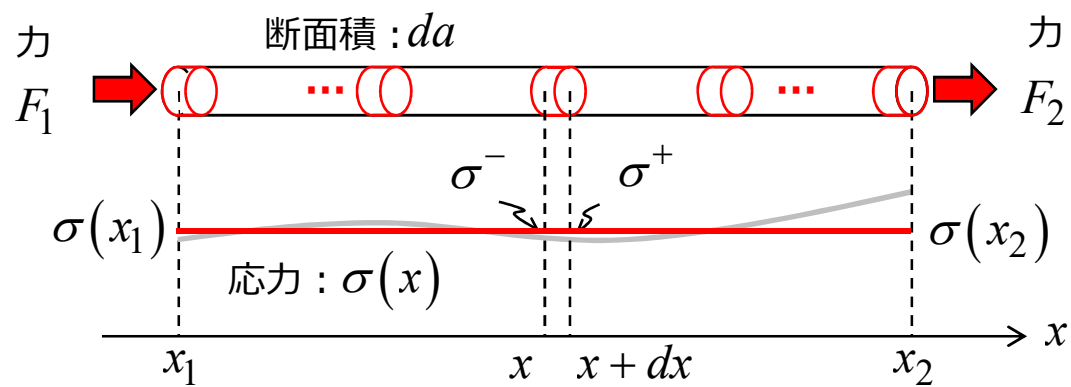
$\parallel$
 0

全体のつり合い

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = 0$$

力のつり合い

1次元問題でのつり合い



全体のつり合い

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = [\sigma]_{x_1}^{x_2} = \sigma(x_2) - \sigma(x_1) = 0$$



$$\sigma(x_1) da = \sigma(x_2) da$$



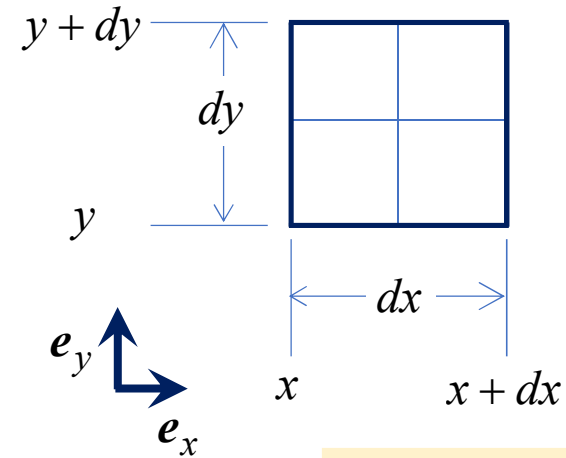
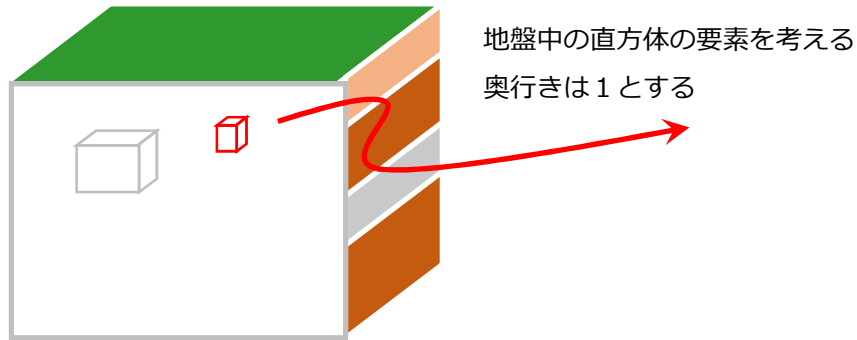
$$F_1 + F_2 = 0$$

外力のつり合い

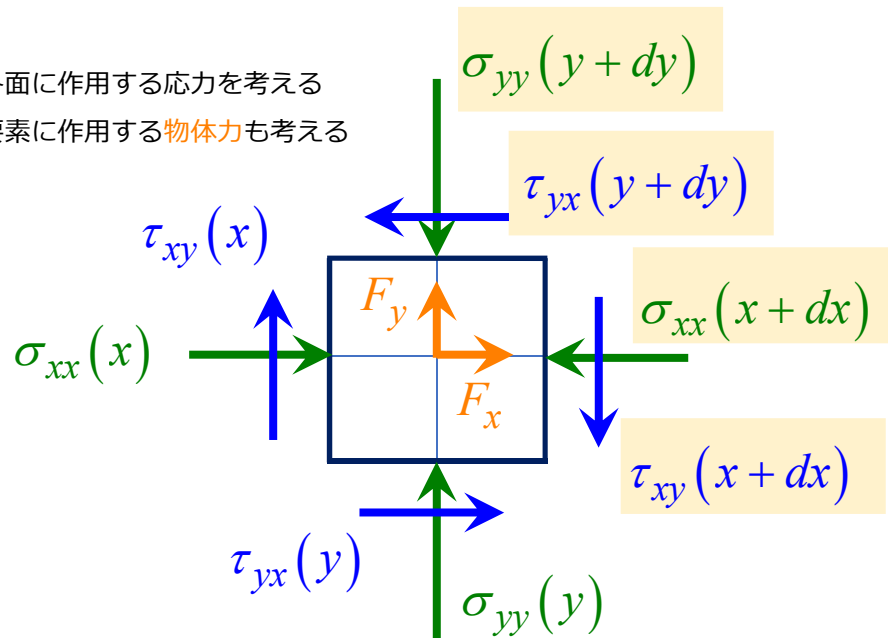
力のつり合い

2次元問題での力のつり合い

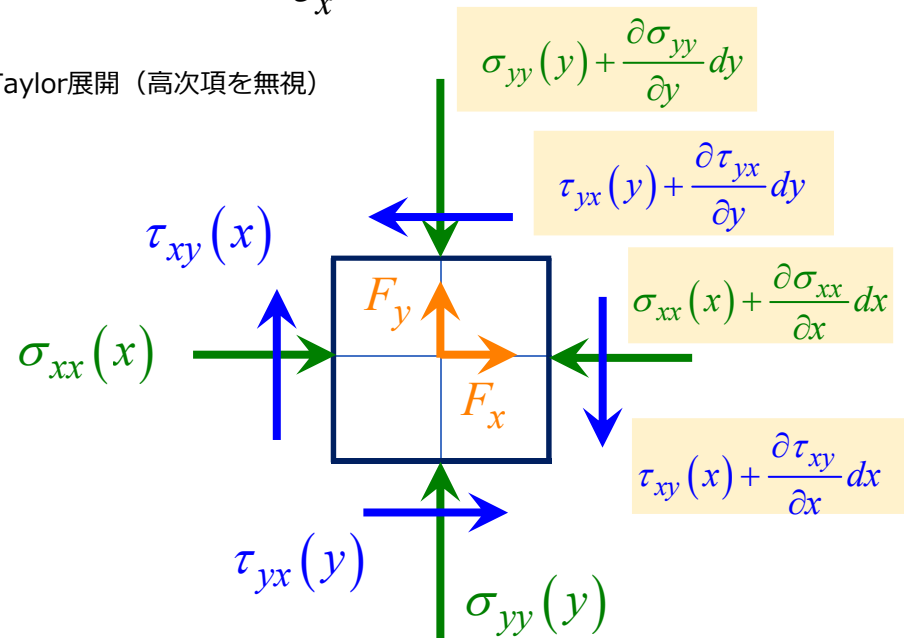
前回は同じ点を通る面を考えていた。
今回は空間的に異なる面であることに注意。



各面に作用する応力を考える
要素に作用する物体力も考える



Taylor展開 (高次項を無視)



力のつり合い

2次元問題での力のつり合い

$$x \text{ 方向のつり合い: } \sigma_{xx} \times dy - \left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right] \times dy + \tau_{yx} \times dx - \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right] \times dx + F_x = 0$$

(右向きが正)

$$y \text{ 方向のつり合い: } \sigma_{yy} \times dx - \left[\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right] \times dx + \tau_{xy} \times dy - \left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right] \times dy + F_y = 0$$

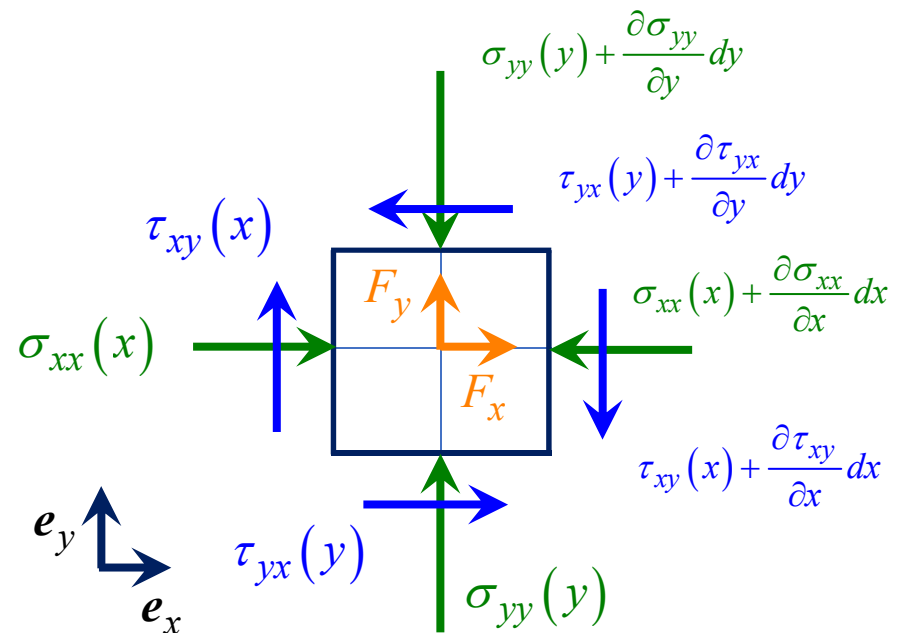
(上向きが正)

まとめると・・・

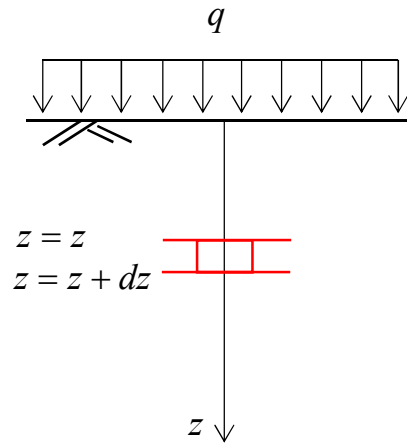
$$x \text{ 方向のつり合い: } \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = F_x$$

$$y \text{ 方向のつり合い: } \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = F_y$$

※ f_x と f_y は単位体積あたりの物体力



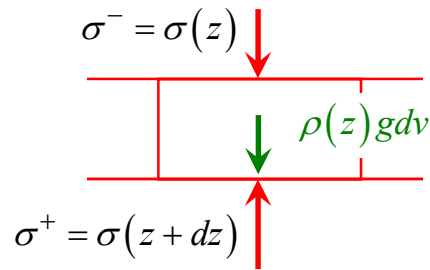
例題 3-1



水平な半無限地盤に等分布荷重 q が作用している。

自重による物体力を考慮して、深さ z 方向のつり合い式を立てた後、任意の深さにおける鉛直応力 σ を深さ z の関数で表しなさい。ただし、地盤の湿潤密度を $\rho = \rho(z)$ 、重力加速度を g とする。

一軸問題と同様、微小要素に作用する z 方向の力のつり合いを考える。微小要素の厚さを dz 、断面積を da とすると、

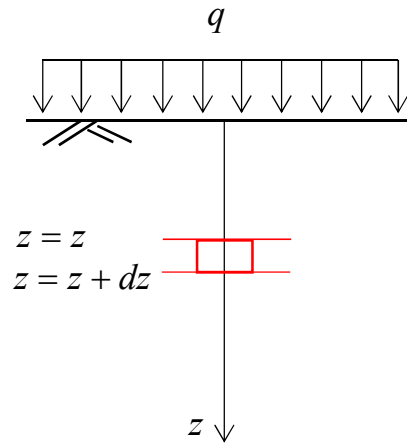


上面に作用する力	下面に作用する力	重力による物体力	
$\sigma(z) \times da$	$-\sigma(z + dz) \times da$	$+\rho(z)g \times dz \times da$	$= 0$

$$\Rightarrow \sigma(z) \times da - \left[\sigma(z) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz \right] \times da + \rho(z)g \times dz \times da = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{つり合い式: } -\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho(z)g = 0}$$

例題 3-1



水平な半無限地盤に等分布荷重 q が作用している。

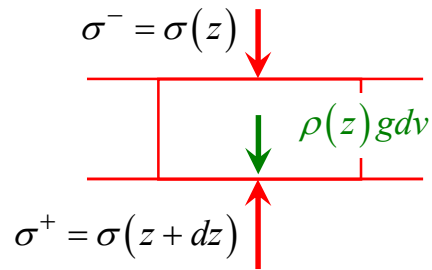
自重による物体力を考慮して、深さ z 方向のつり合い式を立てた後、

任意の深さにおける鉛直応力 σ を深さ z の関数で表しなさい。

ただし、地盤の湿潤密度を $\rho = \rho(z)$ 、重力加速度を g とする。

$$\text{つり合い式: } -\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho(z)g = 0$$

積分領域 $[0, z]$ で定積分する。



$$\int_0^z \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz = \int_0^z \rho(z)g dz$$

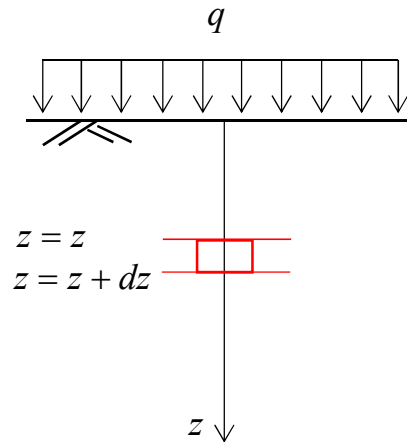
$$\Rightarrow \sigma(z) - \sigma(0) = \int_0^z \rho(z)g dz$$

$$\Rightarrow \sigma(z) = q + \int_0^z \rho(z)g dz$$

もし、湿潤密度 ρ が深さ方向に一定であれば、

$$\Rightarrow \sigma(z) = q + \rho g z$$

例題 3-1



水平な半無限地盤に等分布荷重 q が作用している。

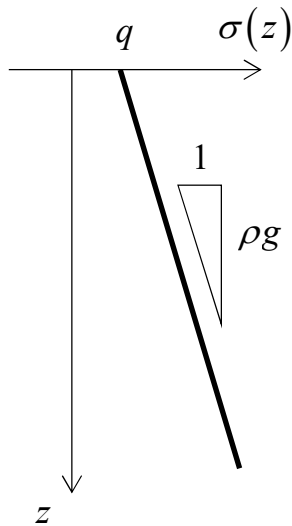
自重による物体力を考慮して、深さ z 方向のつり合い式を立てた後、

任意の深さにおける鉛直応力 σ を深さ z の関数で表しなさい。

ただし、地盤の湿潤密度を $\rho = \rho(z)$ 、重力加速度を g とする。

$$\text{つり合い式: } -\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho(z)g = 0$$

積分領域 $[0, z]$ で定積分する。



$$\int_0^z \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz = \int_0^z \rho(z)g dz$$

$$\Rightarrow \sigma(z) - \sigma(0) = \int_0^z \rho(z)g dz$$

$$\Rightarrow \sigma(z) = q + \int_0^z \rho(z)g dz$$

もし、湿潤密度 ρ が深さ方向に一定であれば、

$$\Rightarrow \sigma(z) = q + \rho g z$$

「力のつり合い」のまとめ

- 力のつり合い条件は、応力を未知数とする偏微分方程式

x 方向のつり合い：

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$

y 方向のつり合い：

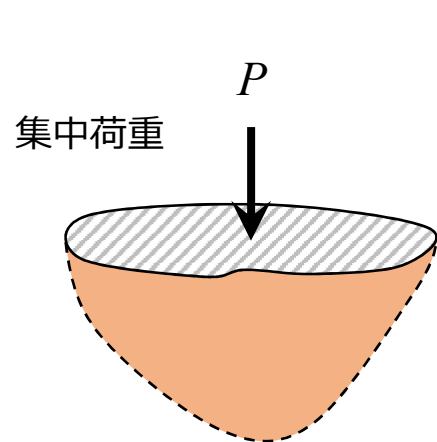
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$$

z 方向のつり合い：

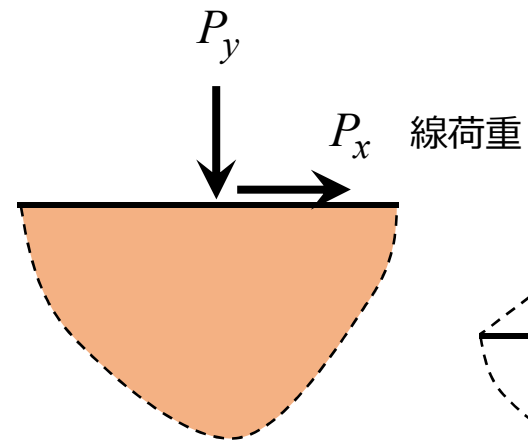
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

- 解を得るためには、境界条件が必要
- 多次元問題は一般に、つり合い条件のみから応力分布を求解できることは稀
 - 理由1：（未知数6コ）＞（式の3本）
 - 理由2：力学問題のほとんどは、境界が全て応力境界で与えられるわけではない
ある境界は応力境界、その他の境界は変位境界
- 「変位を未知数とする偏微分方程式」＋「応力とひずみの関係式」を
場の支配方程式に加えて解く・・・普通は、数値解析的に近似解を得る：
土質力学Ⅱでは立ち入らない ⇒ 連続体力学 etc…
土質力学Ⅱのほとんどの問題は、応力分布が均一・一様を前提
- 限られた条件であるが、天才的な数学的技法による弾性解を紹介

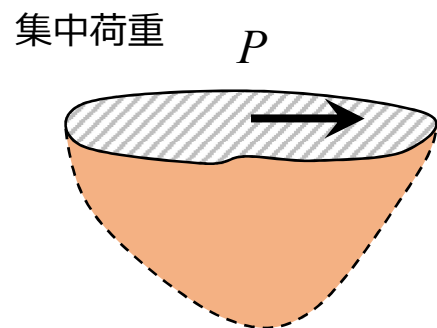
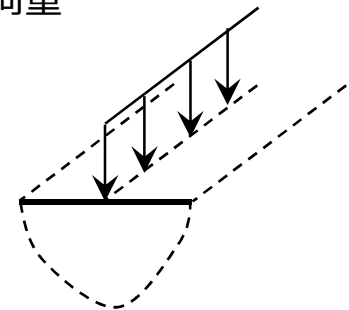
弾性論の範疇での応力分布の解



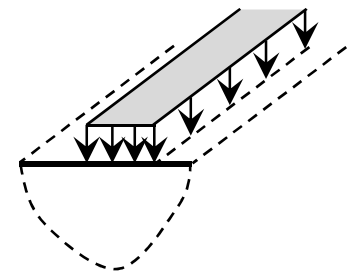
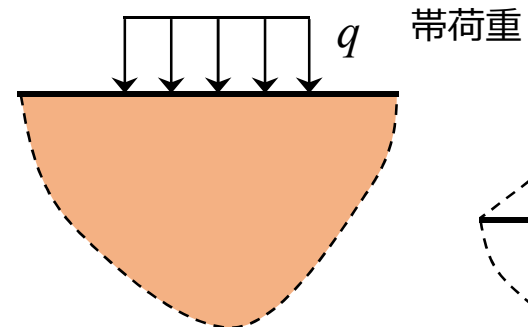
Boussinesq's problem
ブシネスク



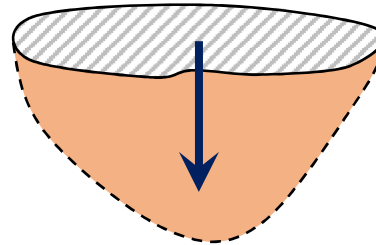
Flamant's problem
フラマン



Cerruti's problem
セルッティ

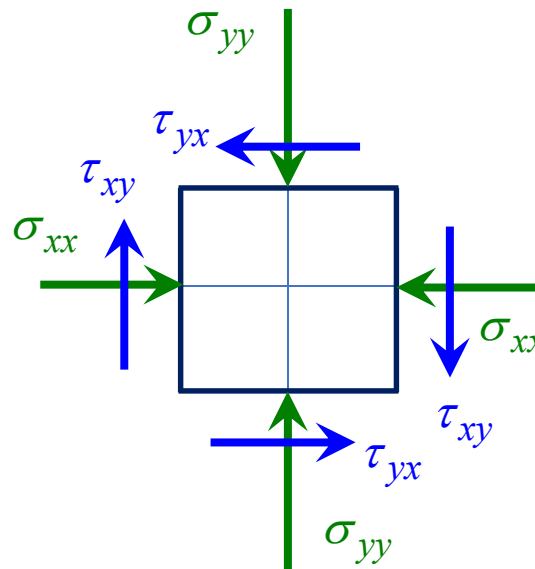
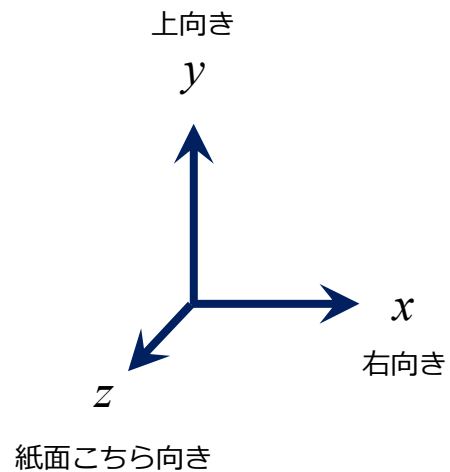


これからの説明における座標系

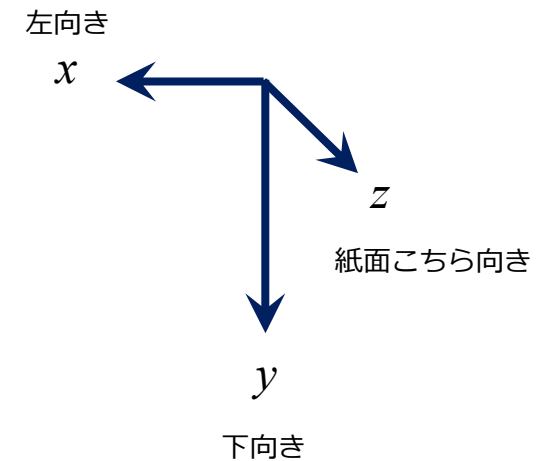


深さ方向について考えるために・・・

今までの座標系

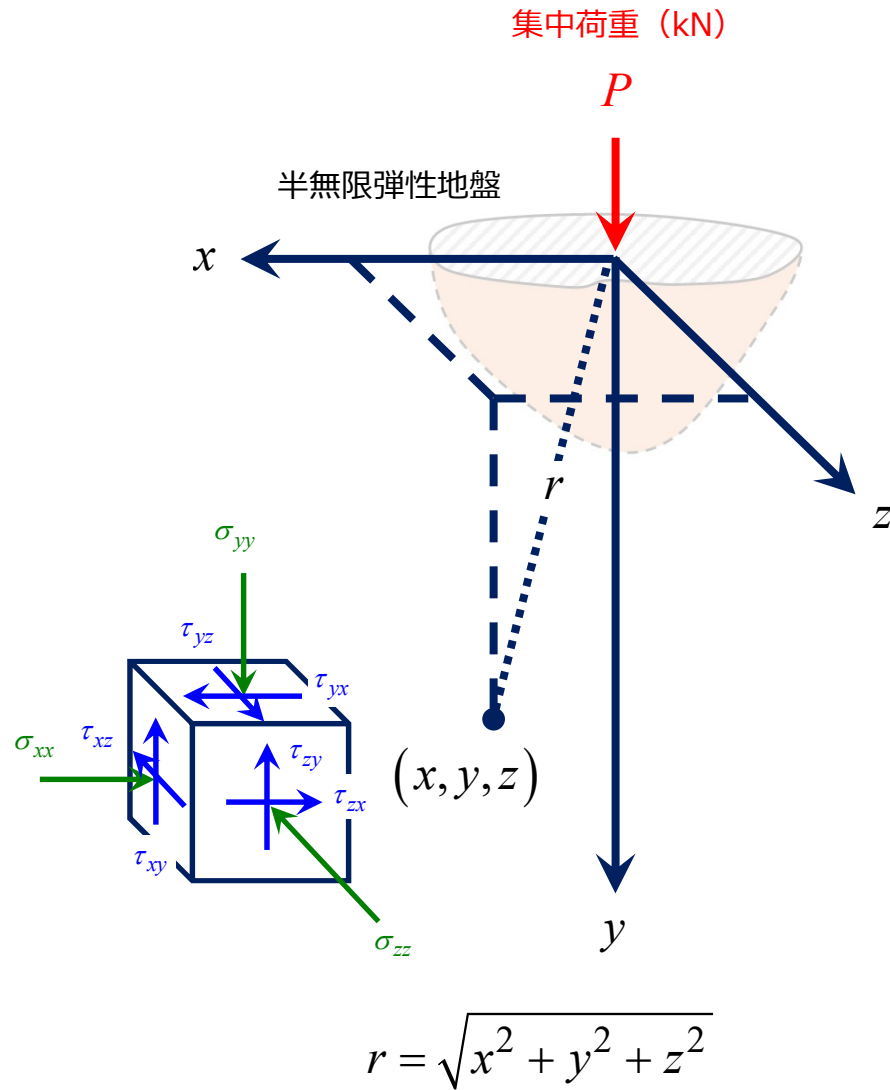


深さ方向を正に採った座標系



応力の正の向きは
左の座標系も右の座標系も同じ

集中荷重による地盤内応力のブシネスク解



$$\sigma_{xx} = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{yx^2}{r^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left\{ \frac{r^2 - ry - y^2}{r^3(r+y)} - \frac{(2r+y)x^2}{r^3(r+y)^2} \right\} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{3P}{2\pi} \frac{y^3}{r^5}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{yz^2}{r^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left\{ \frac{r^2 - ry - y^2}{r^3(r+y)} - \frac{(2r+y)z^2}{r^3(r+y)^2} \right\} \right]$$

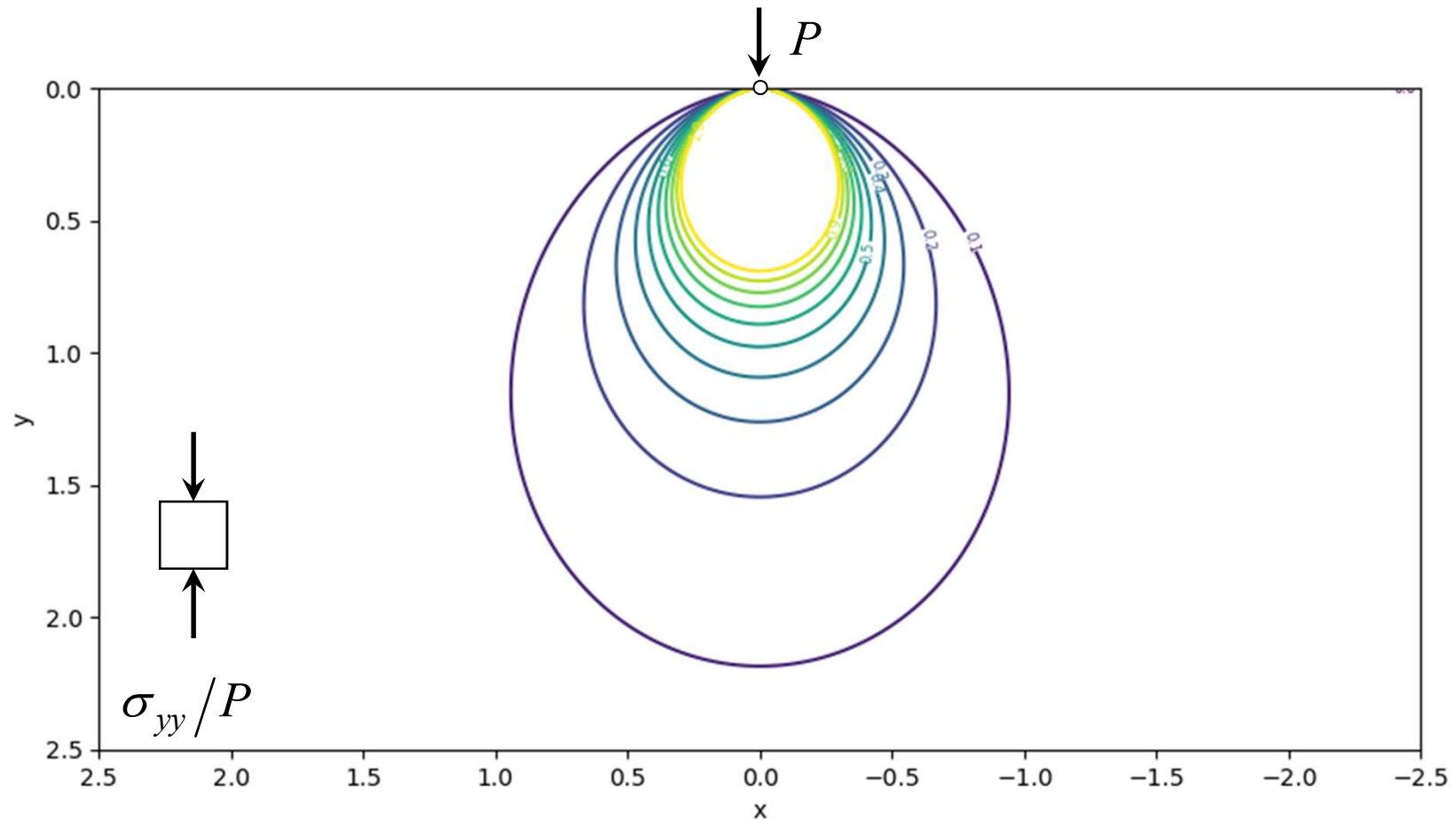
$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2\pi} \frac{xy^2}{r^5}$$

$$\tau_{zy} = \frac{3P}{2\pi} \frac{zy^2}{r^5}$$

$$\tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{xyz}{r^5} + \frac{1-2\nu}{3} \frac{(2r+y)xz}{r^3(r+y)} \right]$$

集中荷重による地盤内応力のブシネスク解

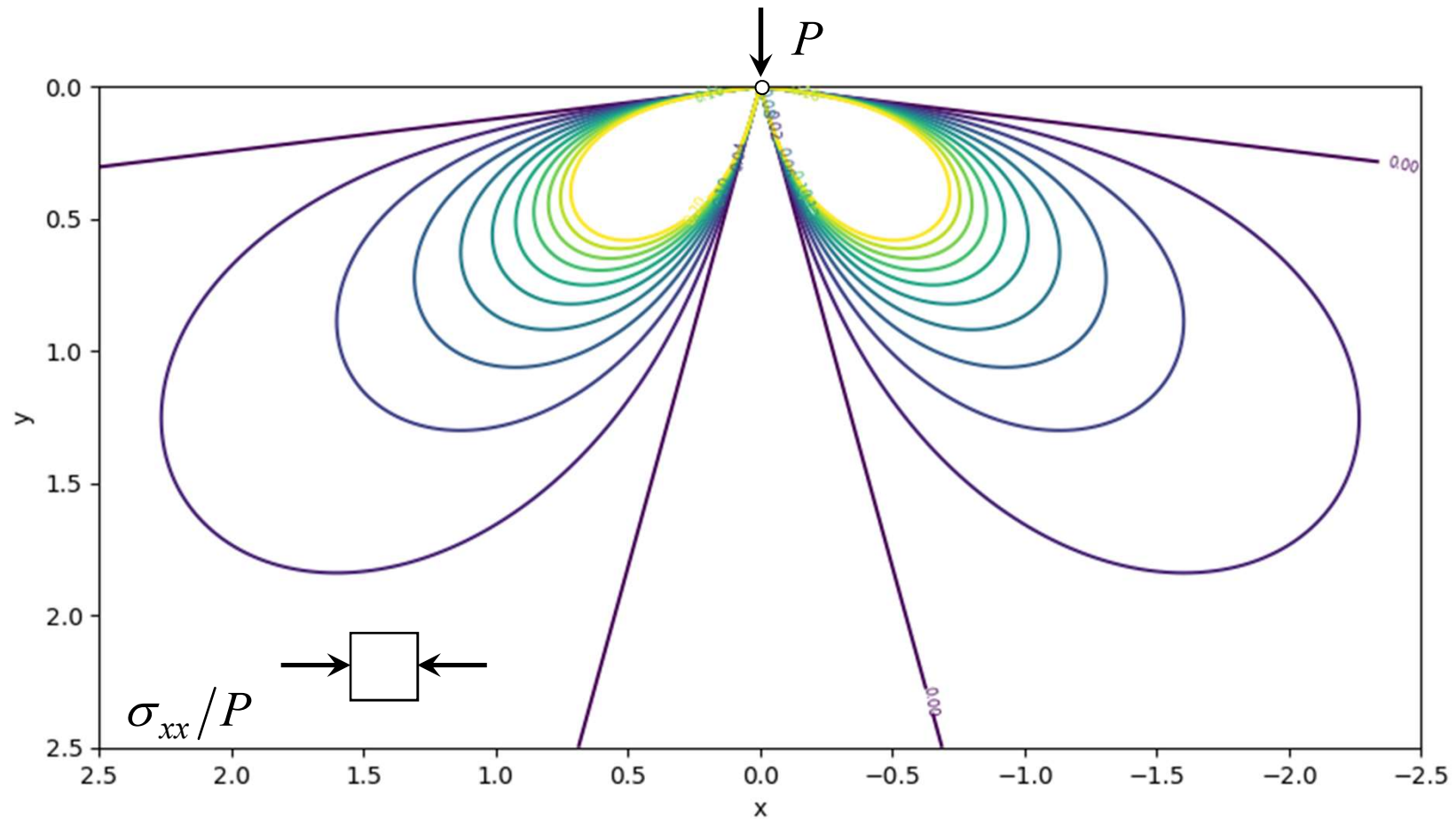
断面 $z = 0$ における鉛直応力 σ_{yy} の等値線群 = 応力球根



- ・ 集中荷重の作用点の応力は定まらない
- ・ 集中荷重の直下 ($x = 0$) では、鉛直応力は深さの二乗に反比例し、減衰

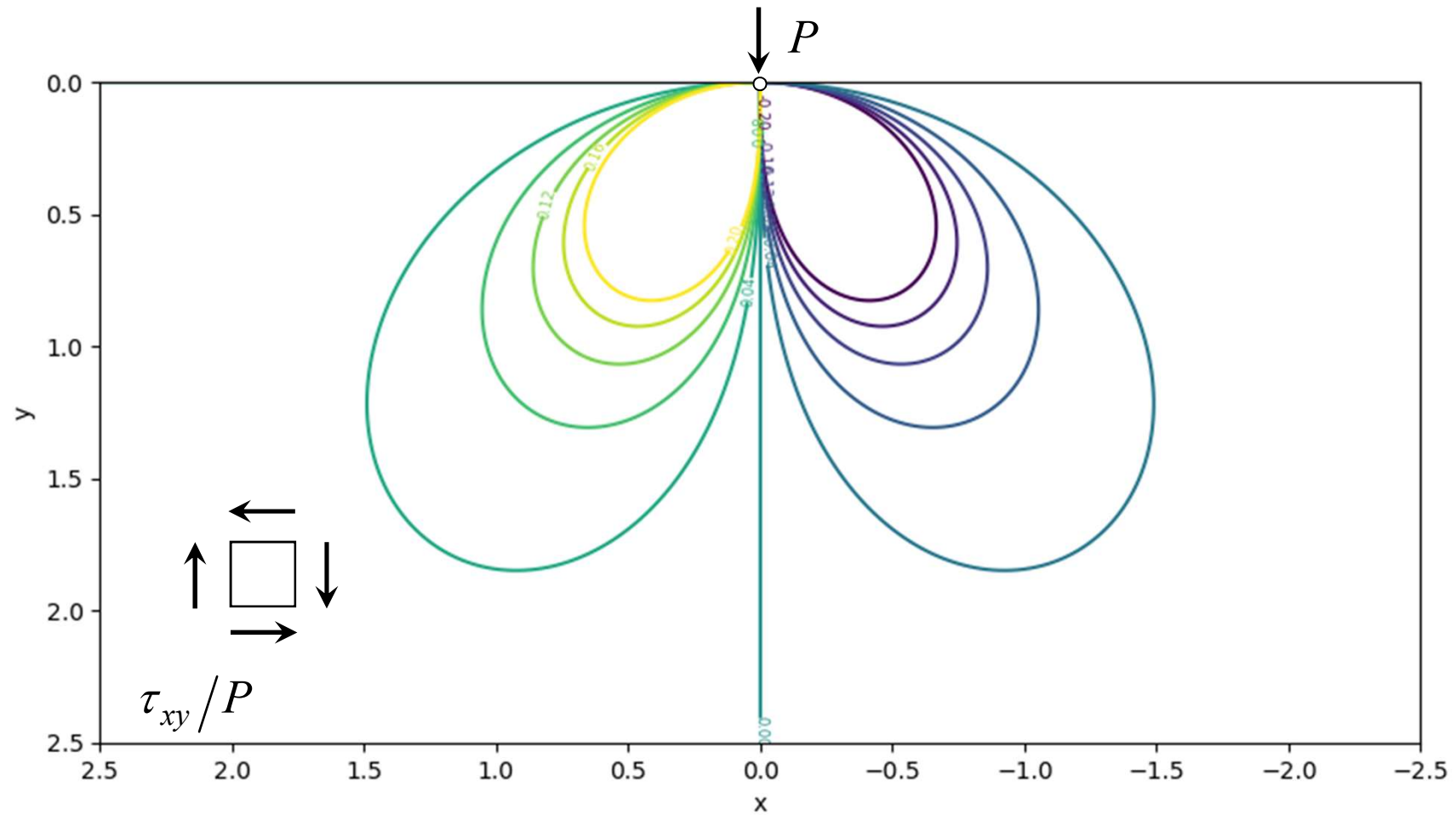
集中荷重による地盤内応力のブシネスク解

断面 $z = 0$ における鉛直応力 σ_{xx} の等値線群

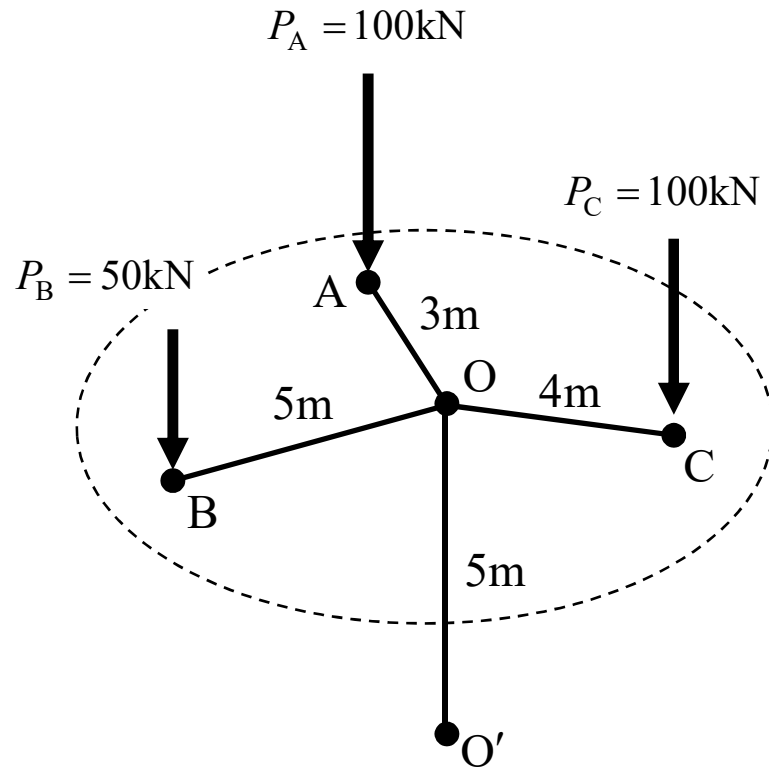


集中荷重による地盤内応力のブシネスク解

断面 $z = 0$ における鉛直応力 τ_{xy} の等値線群



複数の集中荷重による地盤内応力



点O'における鉛直応力：ブシネスク解の重ね合わせによって求まる

$$\sigma_{yy} = \frac{3P}{2\pi} \frac{y^3}{r^5}$$

集中荷重 P_A の寄与： $\sigma_{yy}^A = \frac{3P_A}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} = \frac{3 \times 100}{2\pi} \frac{5^3}{(\sqrt{3^2 + 5^2})^5} = 0.885$

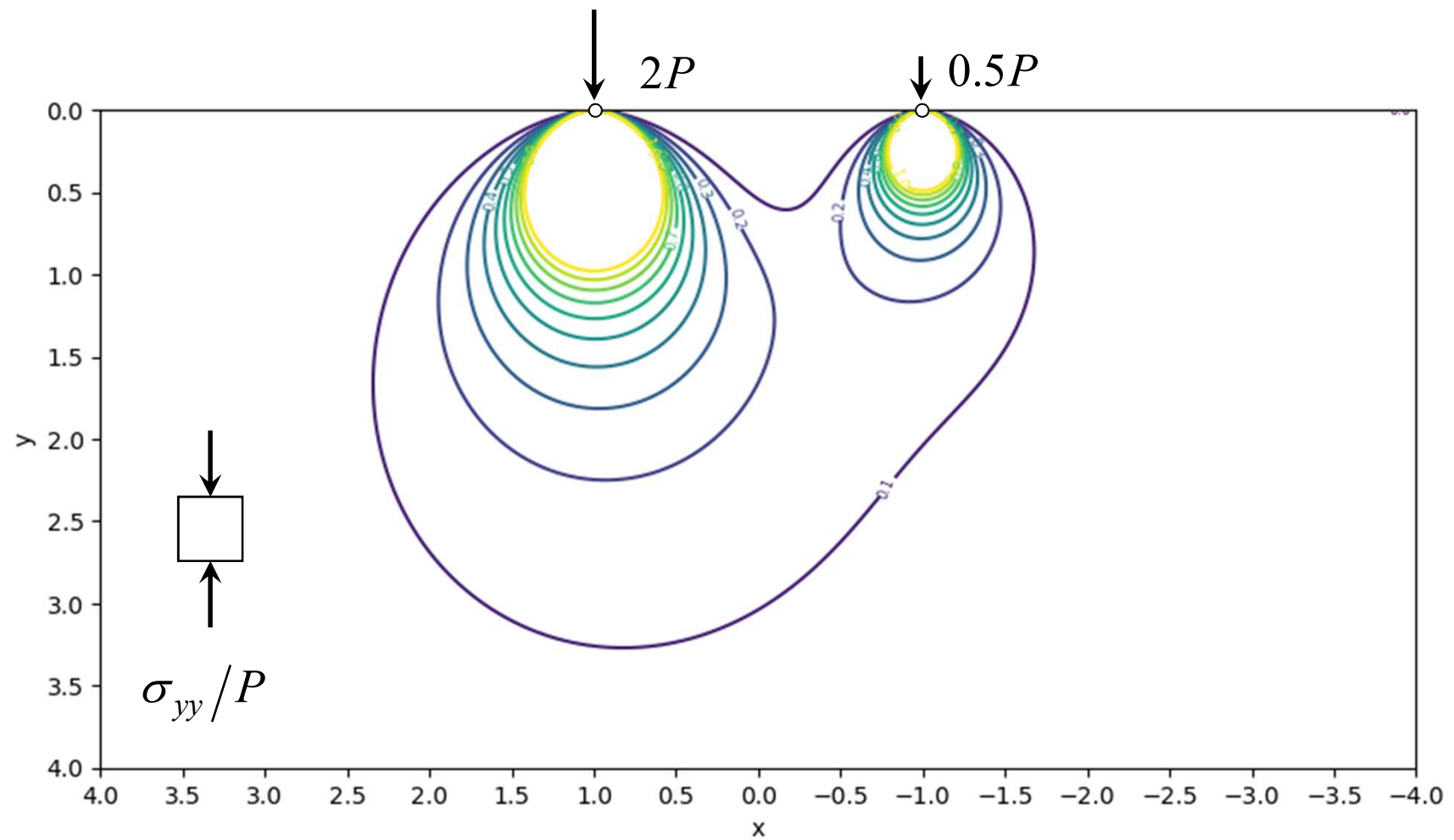
集中荷重 P_B の寄与： $\sigma_{yy}^B = \frac{3P_B}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} = \frac{3 \times 50}{2\pi} \frac{5^3}{(\sqrt{5^2 + 5^2})^5} = 0.169$

集中荷重 P_C の寄与： $\sigma_{yy}^C = \frac{3P_C}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} = \frac{3 \times 100}{2\pi} \frac{5^3}{(\sqrt{4^2 + 5^2})^5} = 0.554$

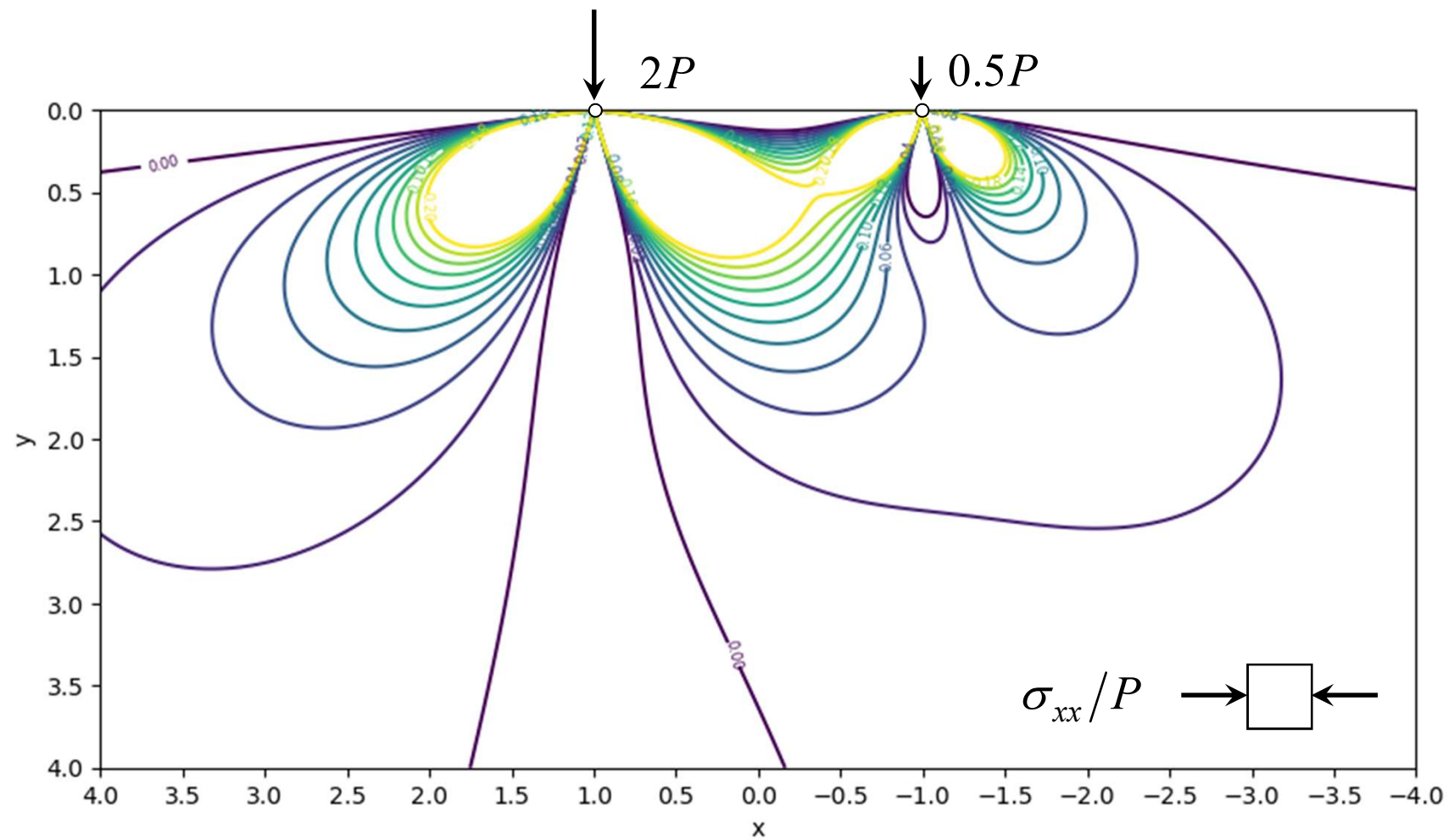
3つの集中荷重によって発生する点O'での鉛直応力は

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^A + \sigma_{yy}^B + \sigma_{yy}^C = 1.61 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

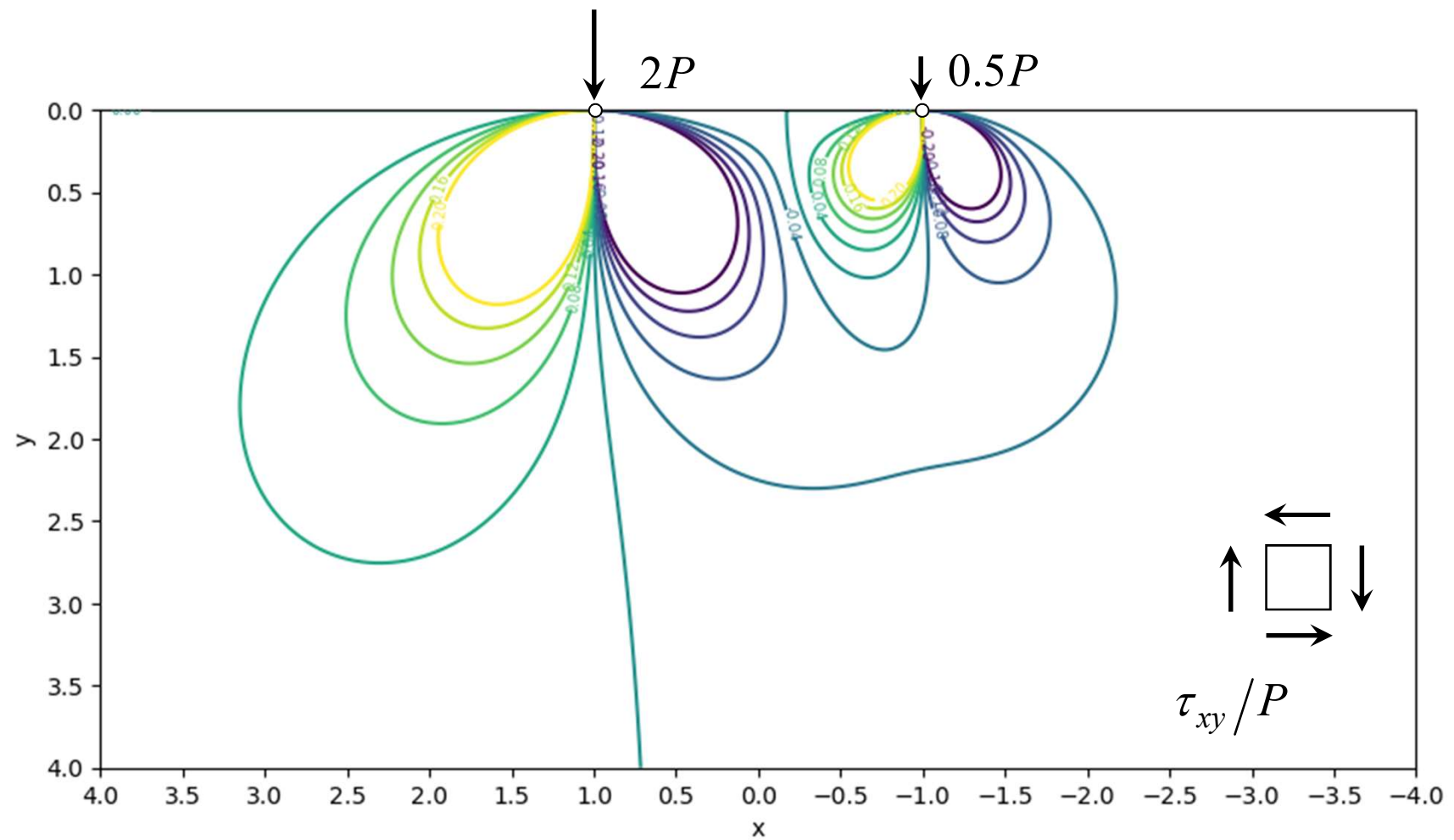
複数の集中荷重による地盤内応力



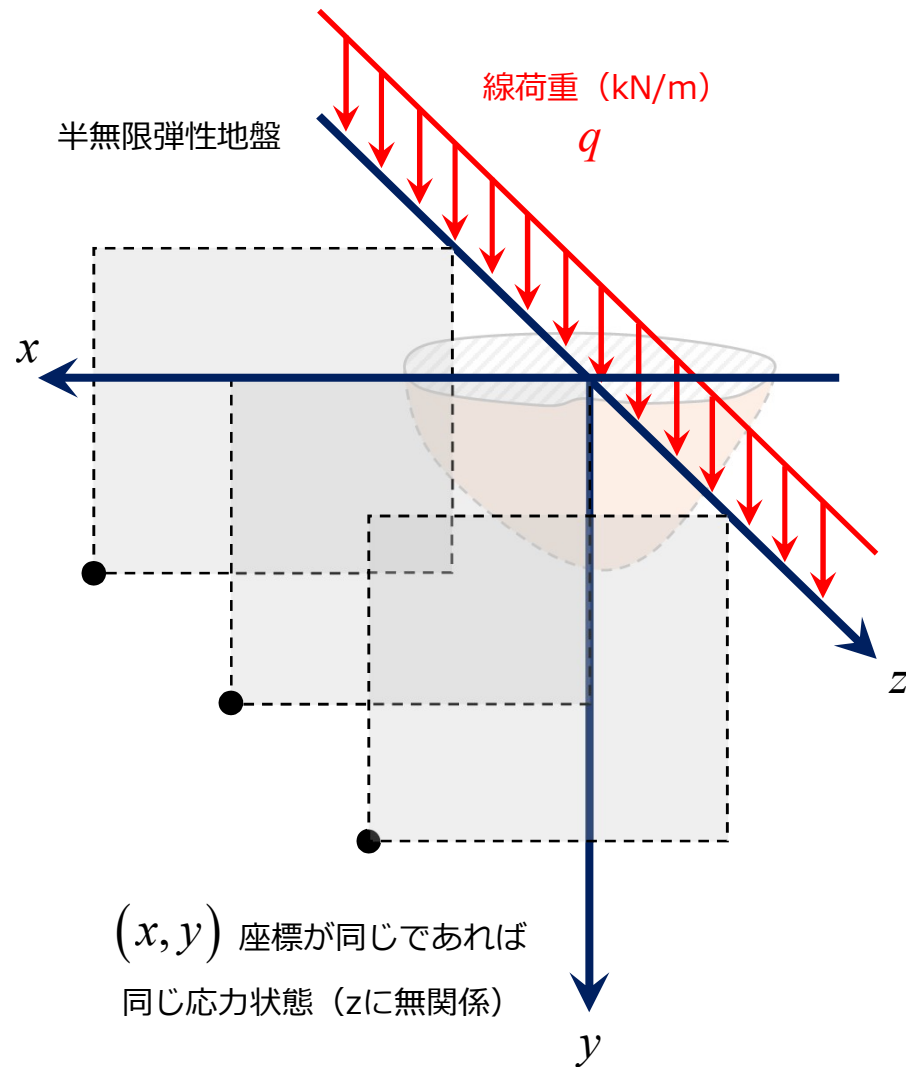
複数の集中荷重による地盤内応力



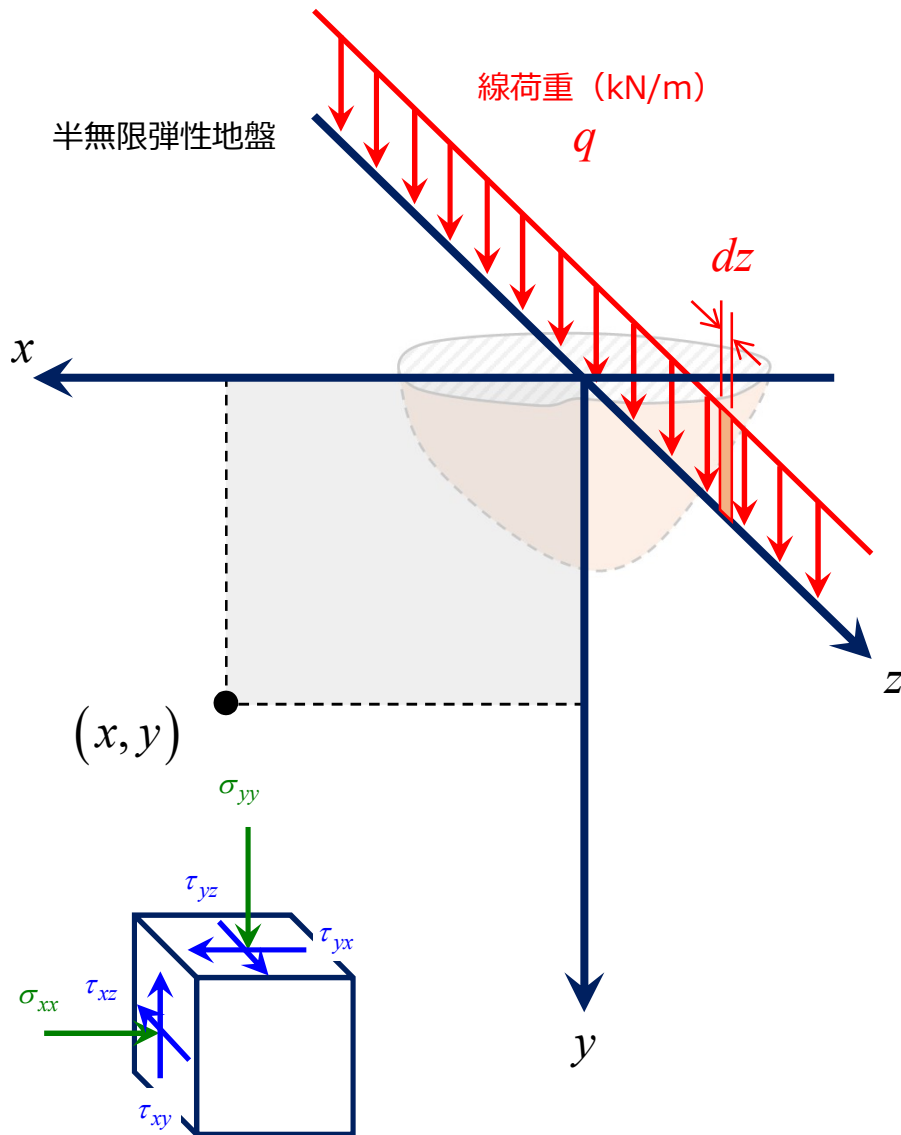
複数の集中荷重による地盤内応力



線荷重による地盤内応力



線荷重による地盤内応力



【考え方】

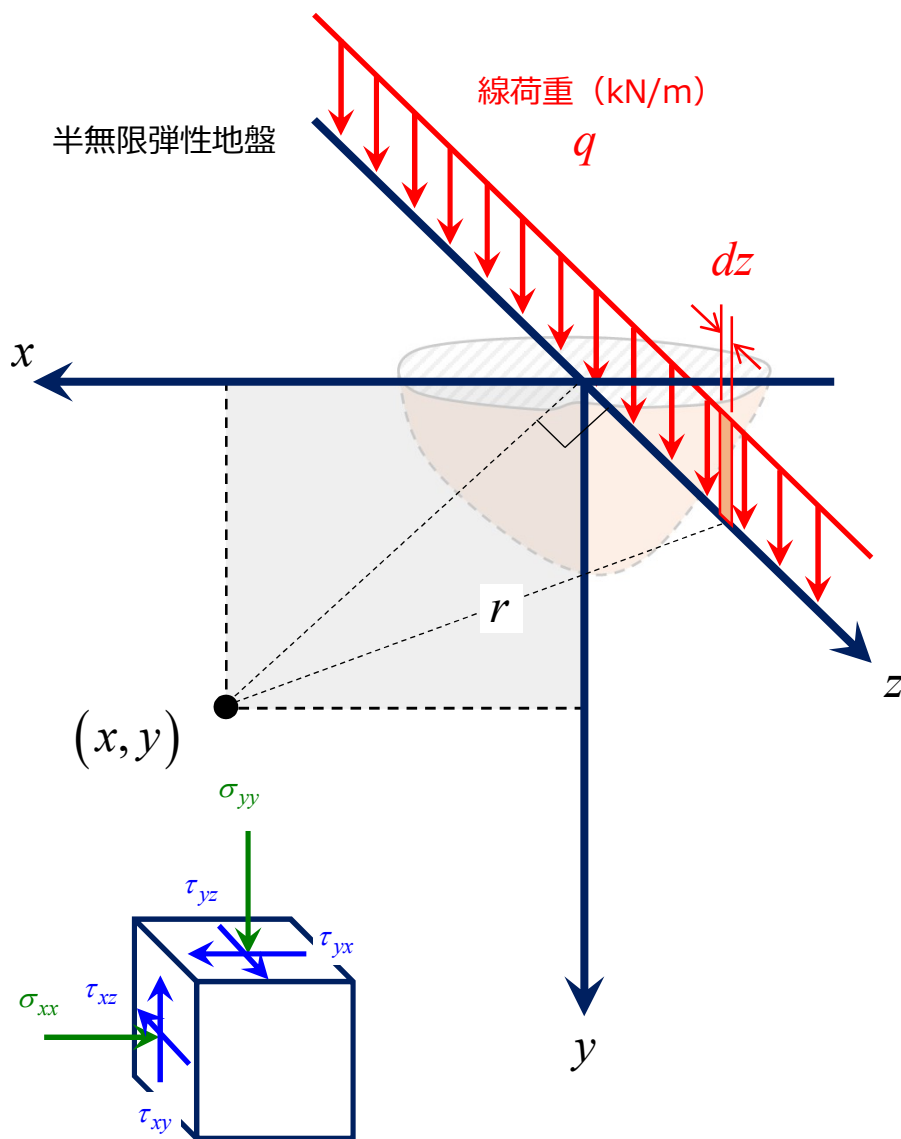
- ① 微小長さ dz に『集中荷重 (kN)』として

$$dP = q \times dz$$

が作用し、 z 方向に無数の dP があると考え

- ② 無数の集中荷重 dP の寄与を
重ね合わせる = 積分することにより
座標 (x, y) に作用する応力を求める

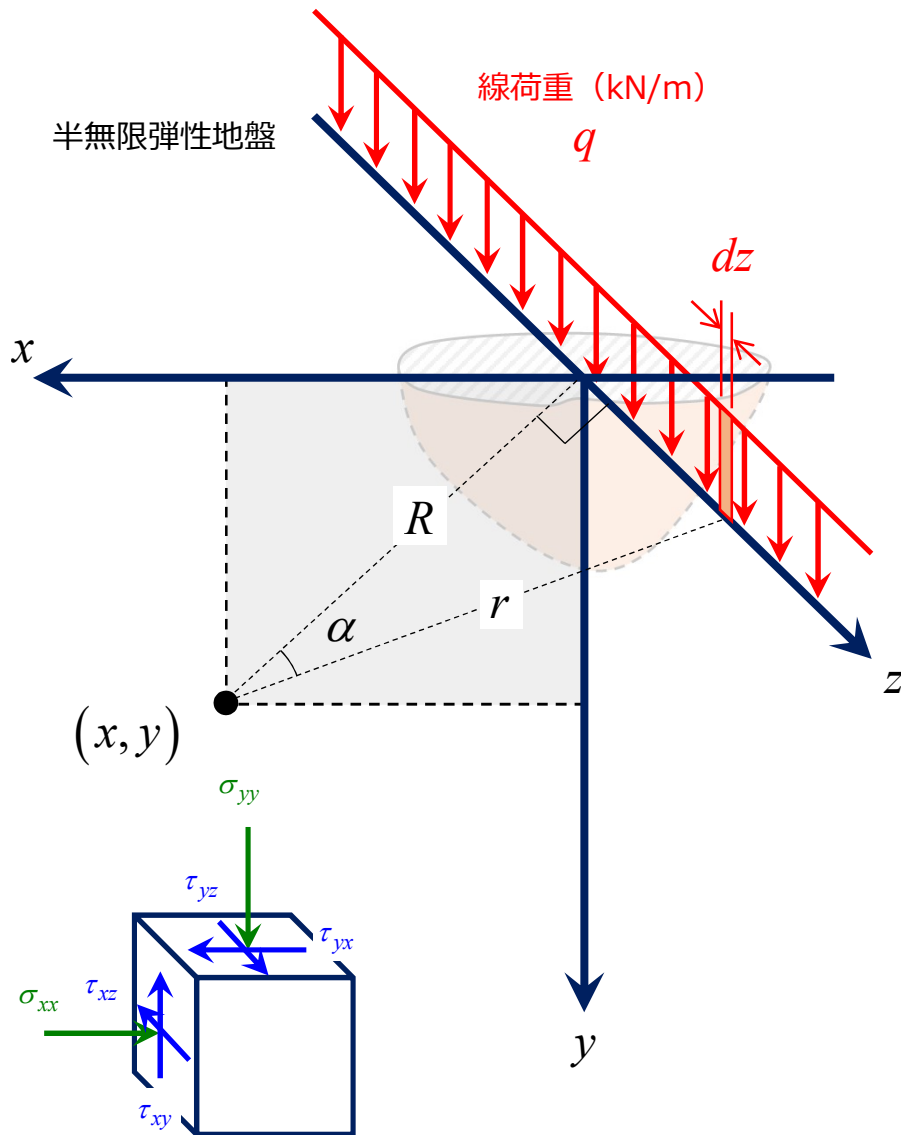
線荷重による地盤内応力



位置 z に作用する「1つの」集中荷重 dP により
生じる鉛直応力 $d\sigma_{yy}$ (ブシネスク解)

$$d\sigma_{yy} = \frac{3dP}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} = \frac{3q}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} dz$$

線荷重による地盤内応力



位置 z に作用する「1つの」集中荷重 dP により
生じる鉛直応力 $d\sigma_{yy}$ (ブシネスク解)

$$d\sigma_{yy} = \frac{3dP}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} = \frac{3q}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} dz$$

後の積分のために長さ R と角度 α によって表す

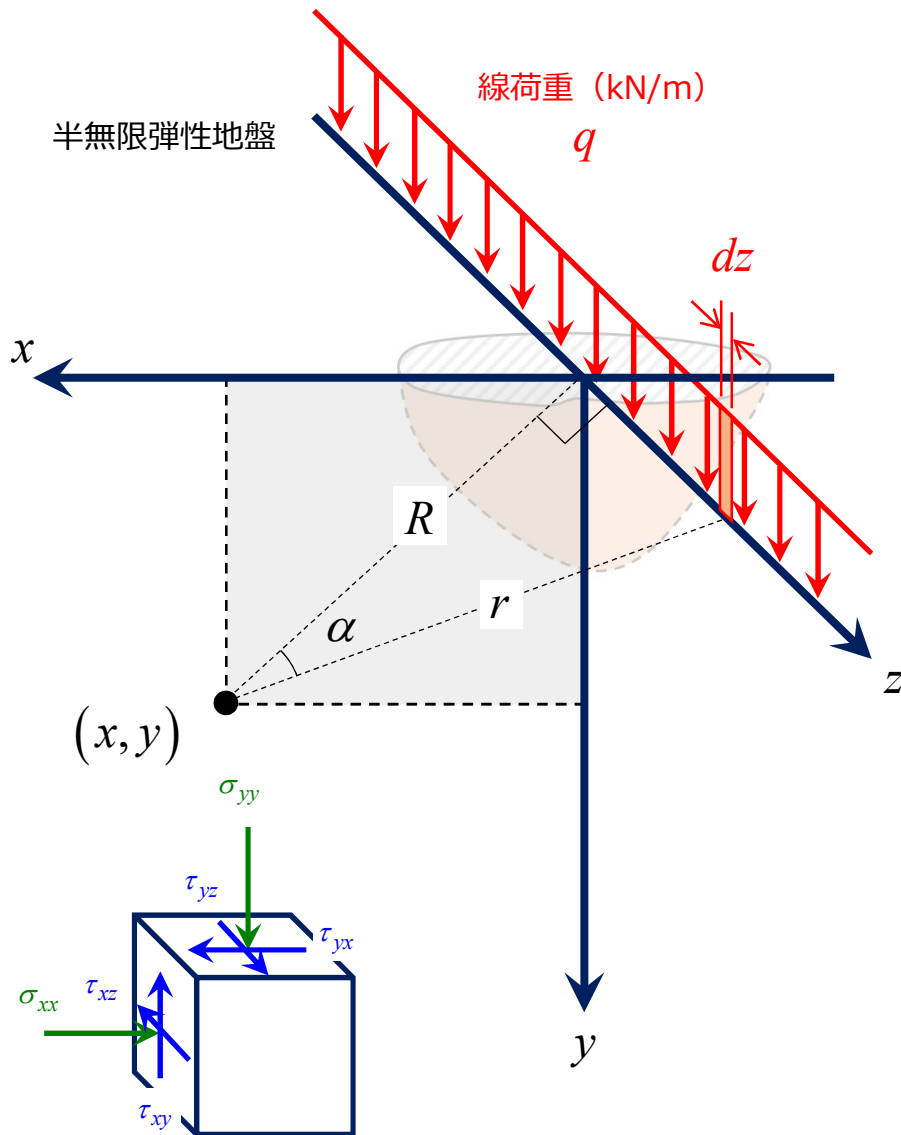
$$r = \frac{R}{\cos \alpha} \quad z = R \tan \alpha$$

$$dz = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$(z \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \pm\pi/2)$$

$$d\sigma_{yy} = \frac{3qy^3}{2\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{R^4} d\alpha$$

線荷重による地盤内応力



無数の集中荷重の寄与を重ね合わせる（積分する）

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \int d\sigma_{yy} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3qy^3}{2\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{R^4} d\alpha \\ &= \frac{3qy^3}{2\pi R^4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \alpha d\alpha\end{aligned}$$

ここで

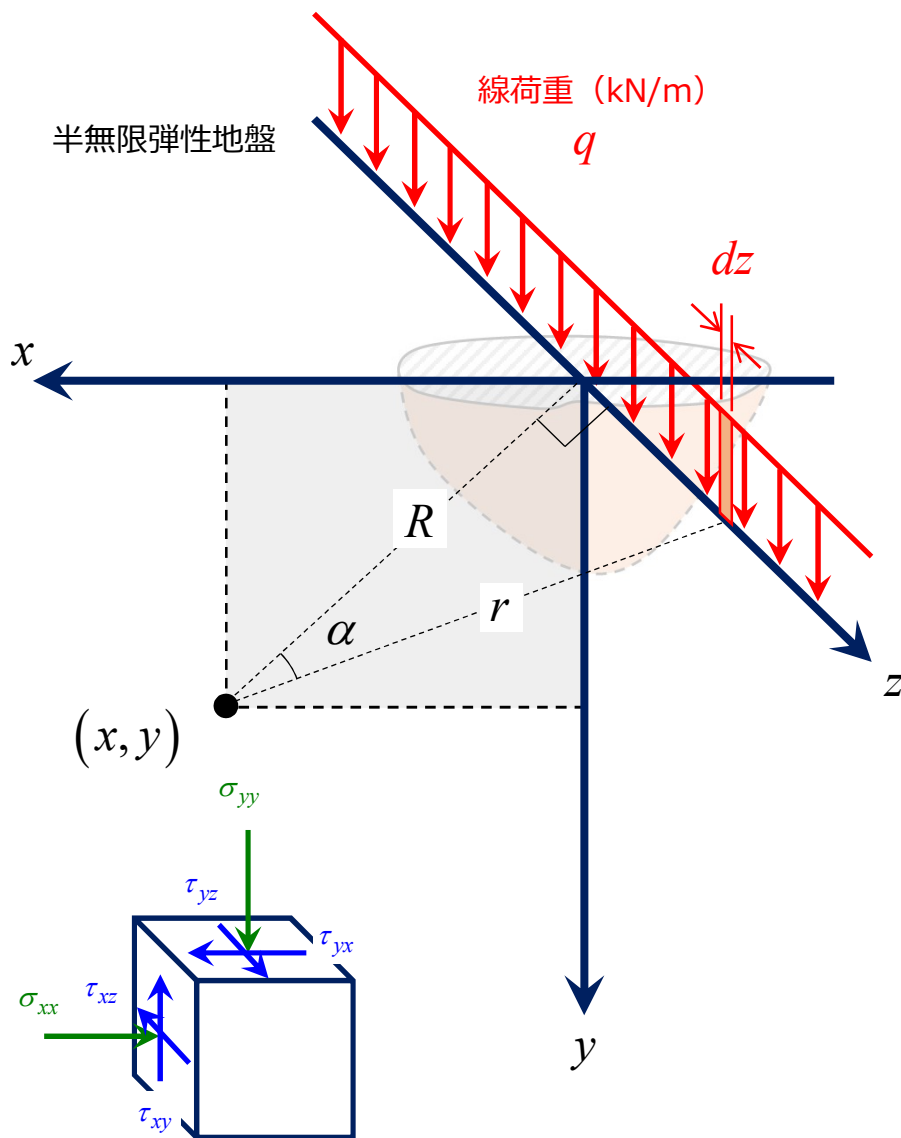
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \alpha d\alpha = \left[\frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{12} \sin 3\alpha \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}$$

よって

$$\sigma_{yy} = \frac{2qy^3}{\pi R^4} = \frac{2q}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

線荷重による地盤内応力

同じような方法で他の応力成分も求まる



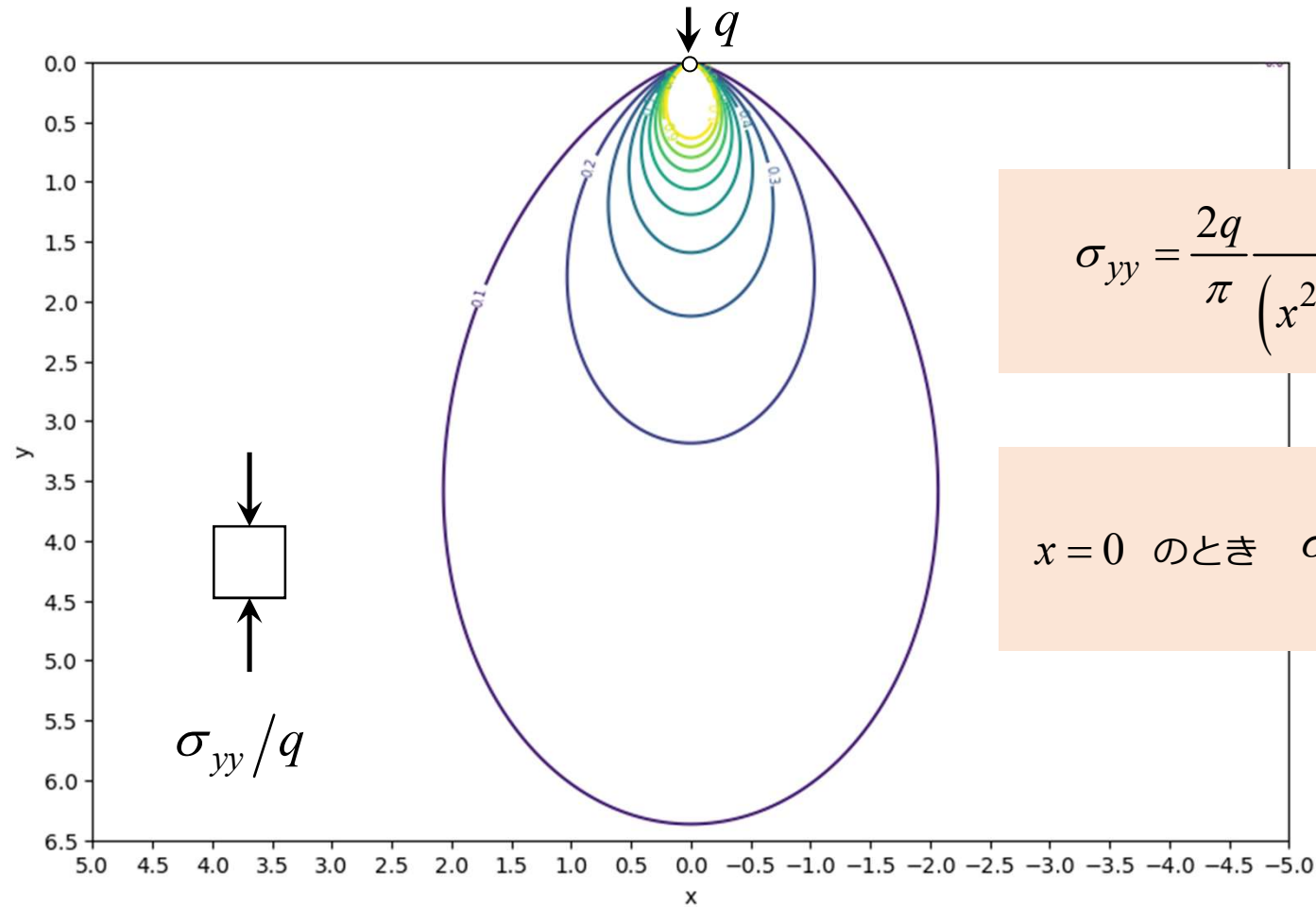
$$\sigma_{yy} = \frac{2q}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{2q}{\pi} \frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{2q}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

線荷重による地盤内応力

線荷重 q による鉛直応力 σ_{yy} の等値線群 (応力球根)



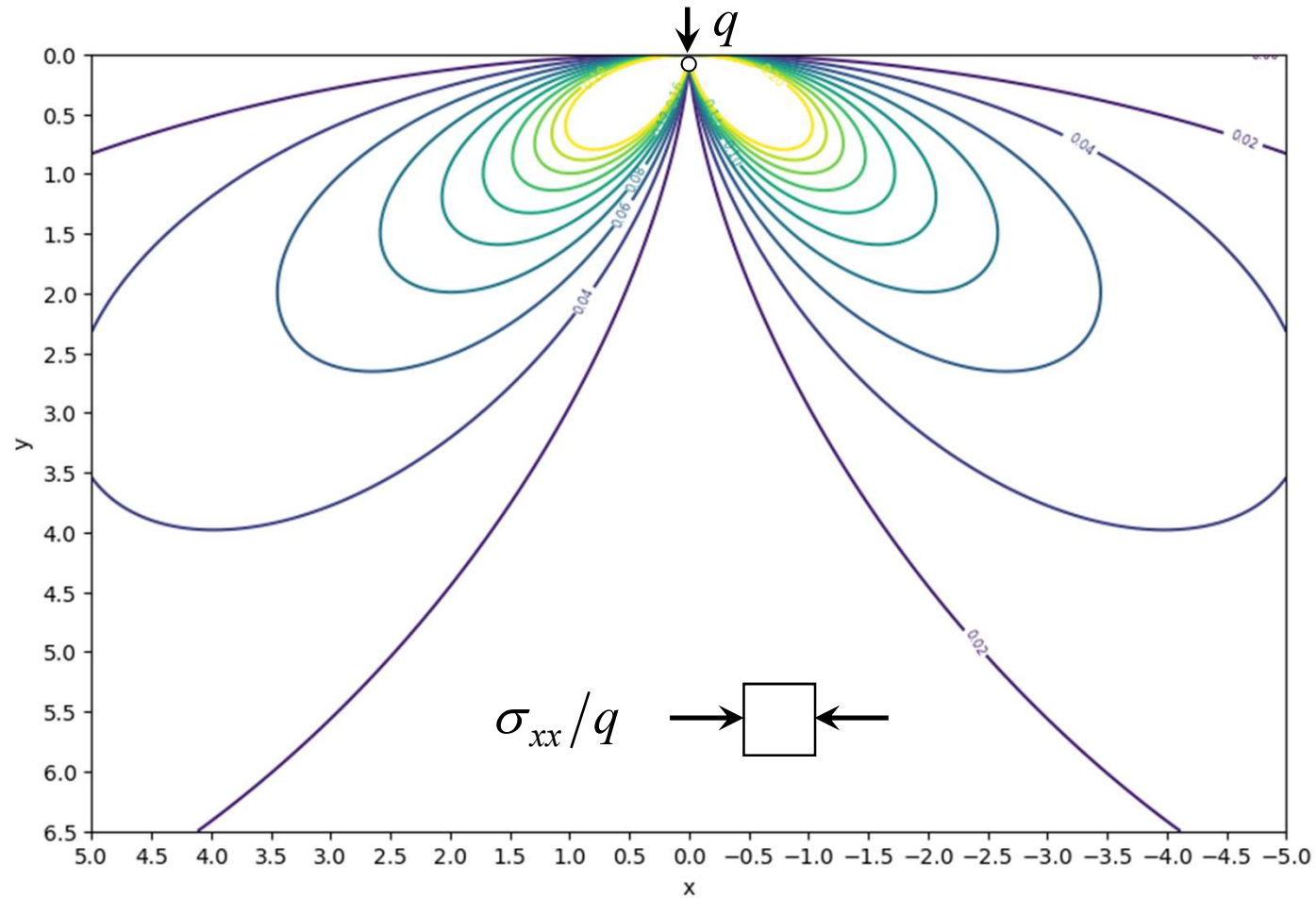
$$\sigma_{yy} = \frac{2q}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$x = 0 \text{ のとき } \sigma_{yy} = \frac{2q}{\pi} \frac{1}{y}$$

- z 座標には無関係 = どの xy 平面を採っても分布は同じ
- 集中荷重の直下 ($x = 0$) では、鉛直応力は深さに反比例し, 減衰

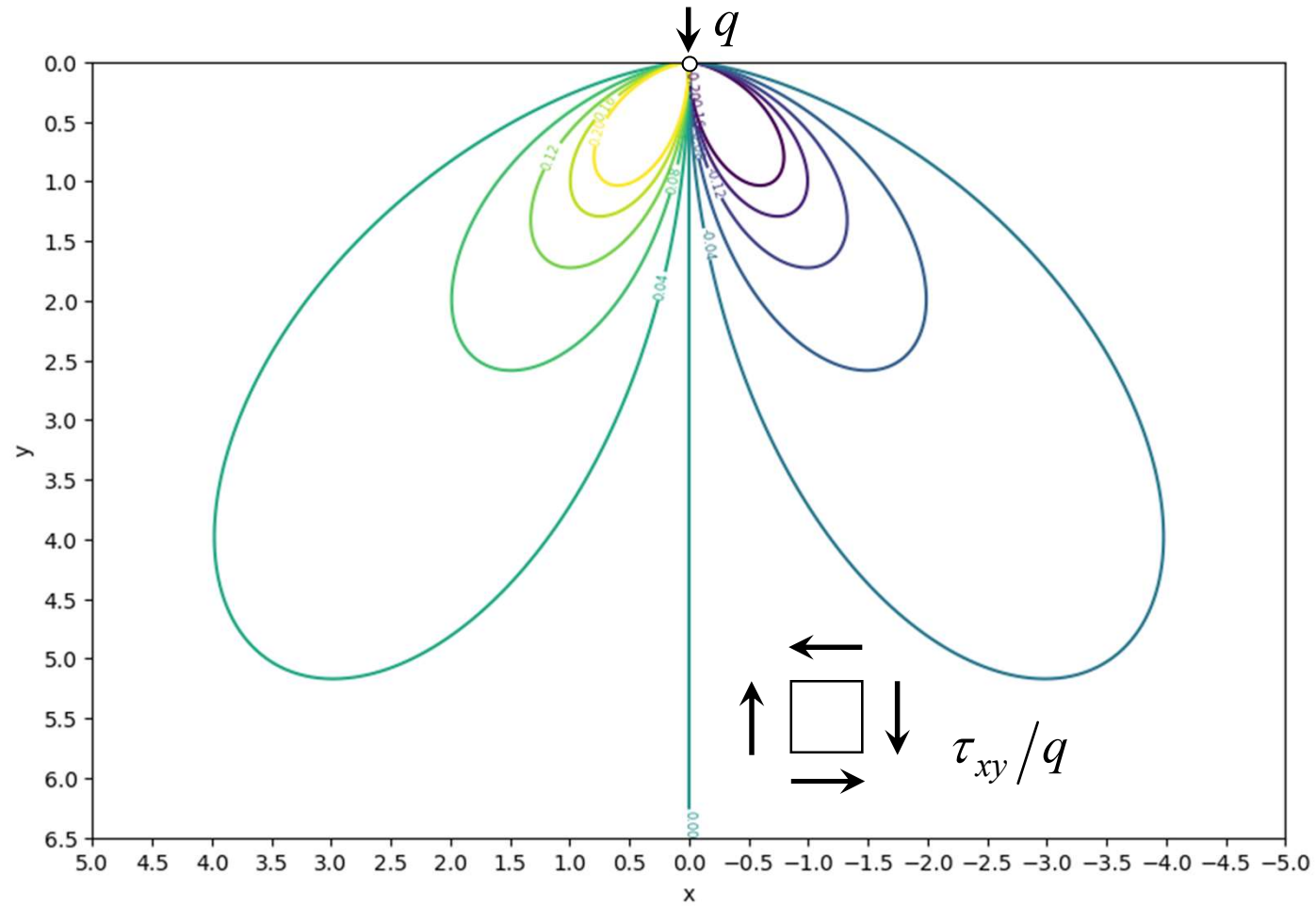
線荷重による地盤内応力

線荷重 q による水平応力 σ_{xx} の等値線群

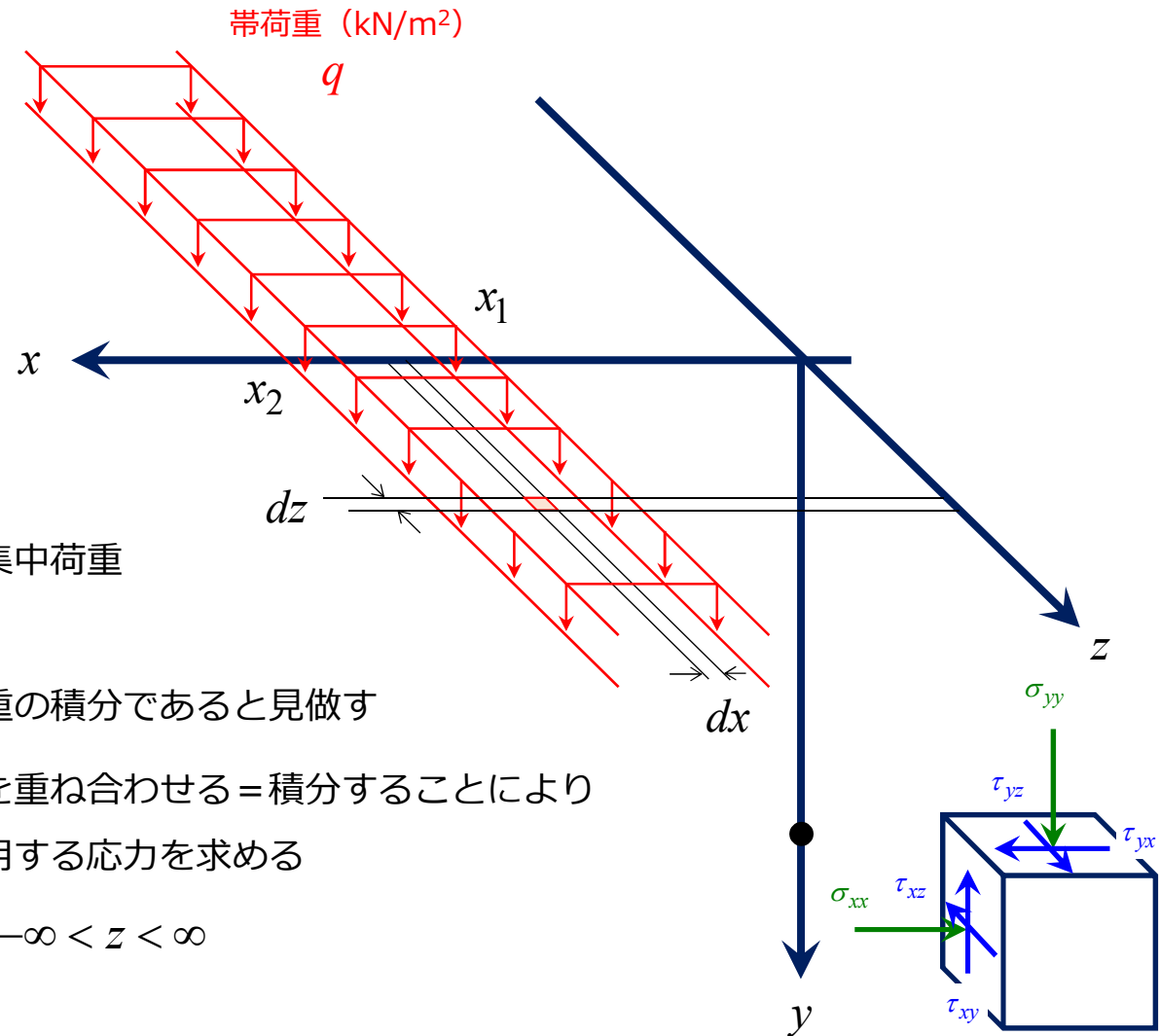


線荷重による地盤内応力

線荷重 q による水平応力 τ_{xy} の等値線群



帯荷重による地盤内応力



【考え方】

- ① 微小面積 $dx dz$ に作用する集中荷重

$$dP = q \times dx dz$$

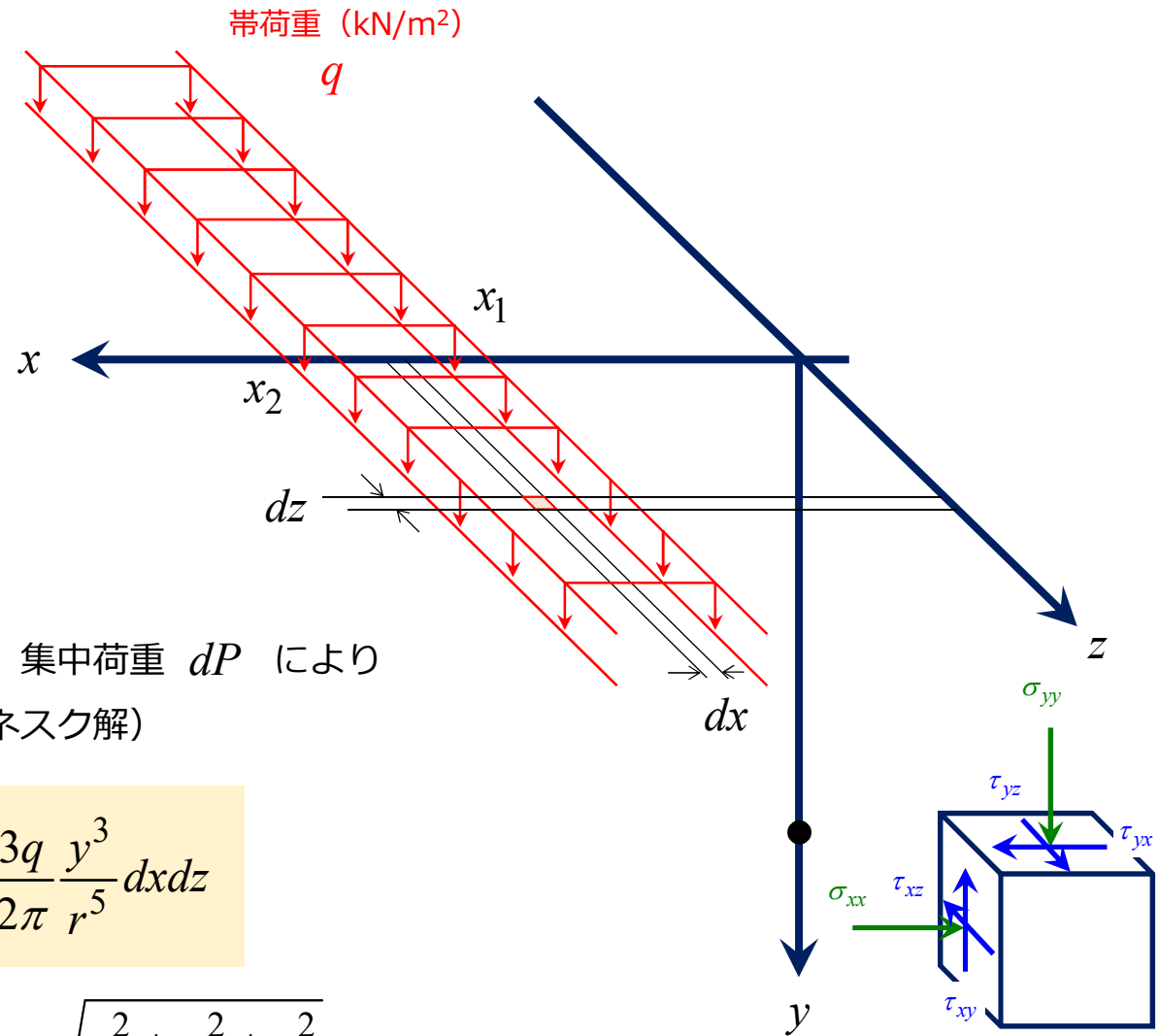
を考え、帯荷重はこの集中荷重の積分であると見做す

- ② 無数の集中荷重 dP の寄与を重ね合わせる = 積分することにより

座標 $(x, y) = (0, y)$ に作用する応力を求める

積分区間は $x_1 \leq x \leq x_2$ $-\infty < z < \infty$

帯荷重による地盤内応力

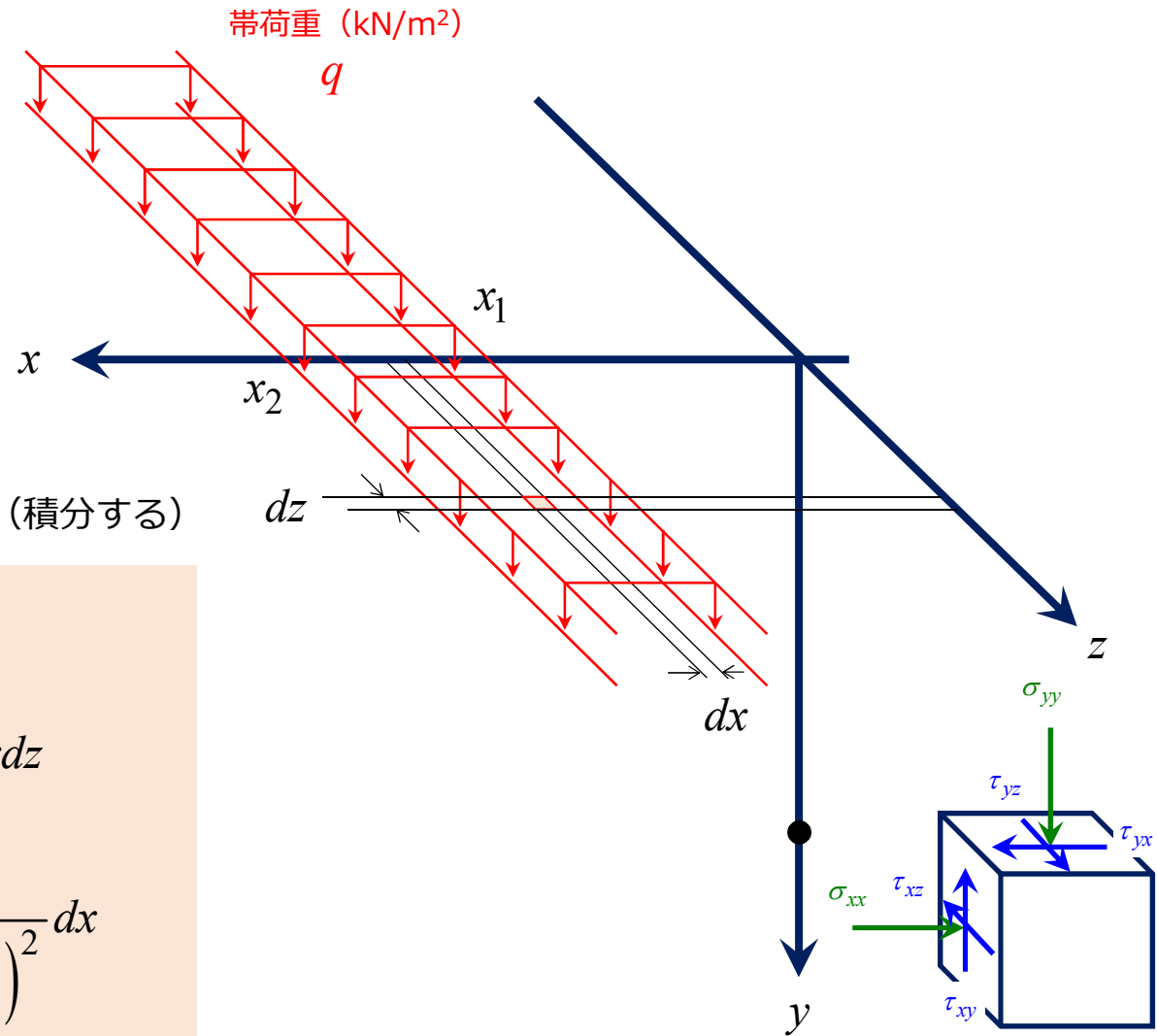


位置 (x, z) に作用する「1つの」集中荷重 dP により
生じる鉛直応力 $d\sigma_{yy}$ (ブシネスク解)

$$d\sigma_{yy} = \frac{3dP}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} = \frac{3q}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} dx dz$$

ただし $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

帯荷重による地盤内応力



$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \int d\sigma_{yy} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3q}{2\pi} \frac{y^3}{r^5} dx dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} dx\end{aligned}$$

※ y 方向の積分は線荷重で求めた通り

帯荷重による地盤内応力

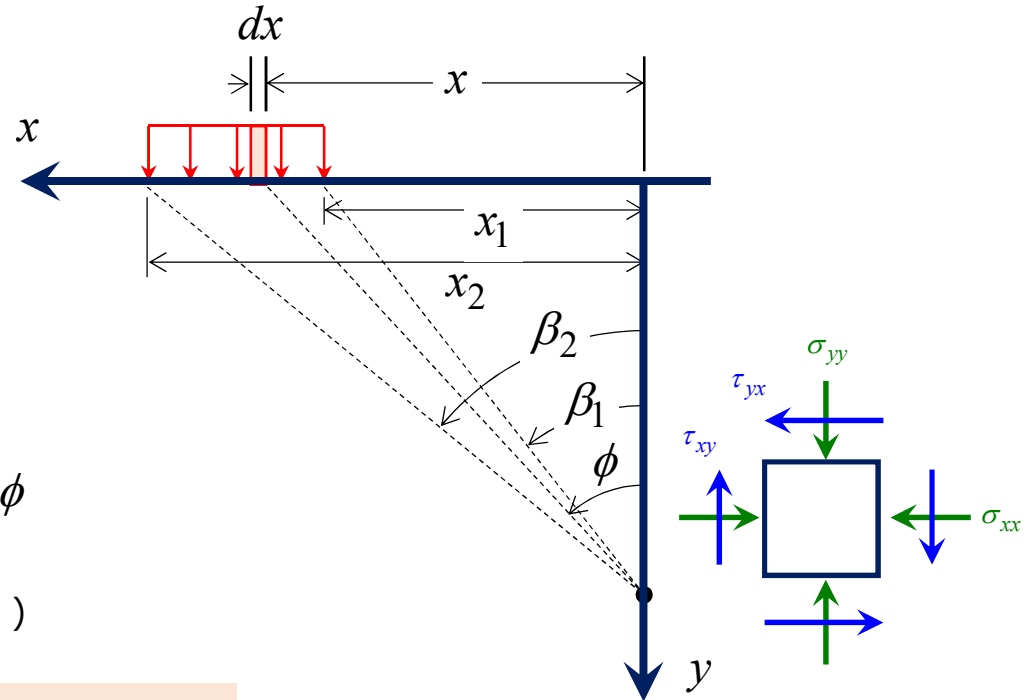
$$\sigma_{yy} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

積分するために右図のような角度を導入する
(変数 x を変数 ϕ で置換する)

$$x = y \tan \phi \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{y}{\cos^2 \phi} d\phi$$

$$(x_1 \leq x \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_1 \leq \phi \leq \beta_2)$$

$$\sigma_{yy} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos^2 \phi d\phi$$



積分する

$$\begin{aligned} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos^2 \phi d\phi &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi = \frac{1}{2} \left[\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{1}{2} \left[\phi + \sin \phi \cos \phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\beta_2 - \beta_1) + \sin \beta_2 \cos \beta_1 - \sin \beta_1 \cos \beta_2 \} = \frac{1}{2} \{ (\beta_2 - \beta_1) + \sin(\beta_2 - \beta_1) \cos(\beta_2 + \beta_1) \} \end{aligned}$$

帯荷重による地盤内応力

$$2\theta = \beta_2 - \beta_1 \quad \text{と置くと}$$

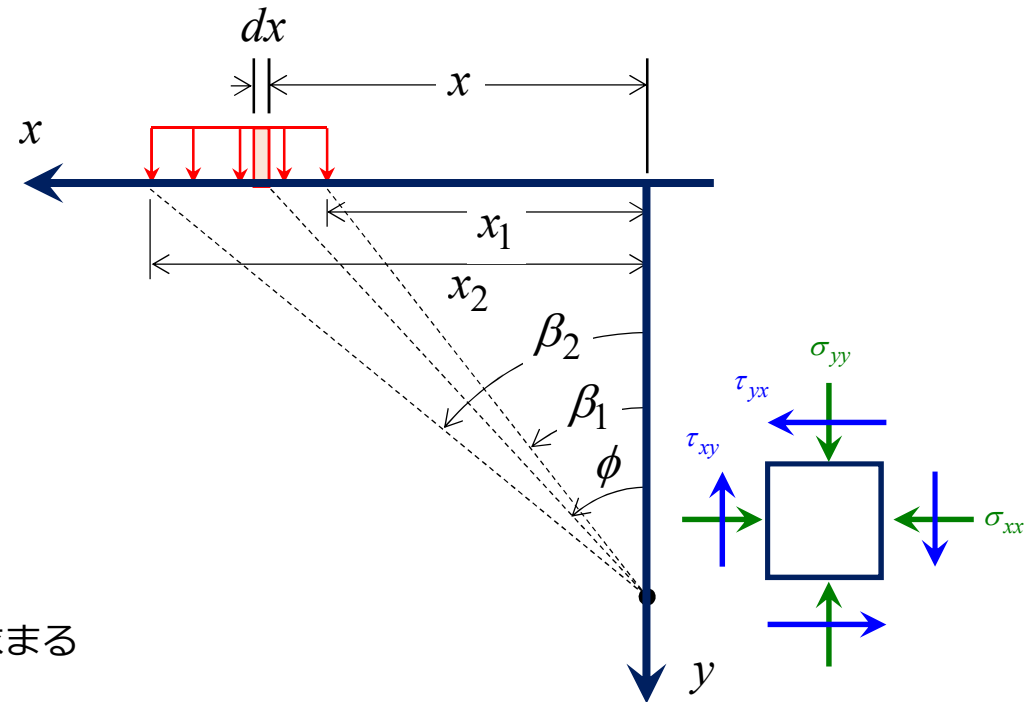
$$2\varphi = \beta_2 + \beta_1$$

$$\sigma_{yy} = \frac{q}{\pi} (2\theta + \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

他の成分も同じように積分すれば求まる

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{\pi} (2\theta - \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{\pi} \sin 2\theta \sin 2\varphi$$

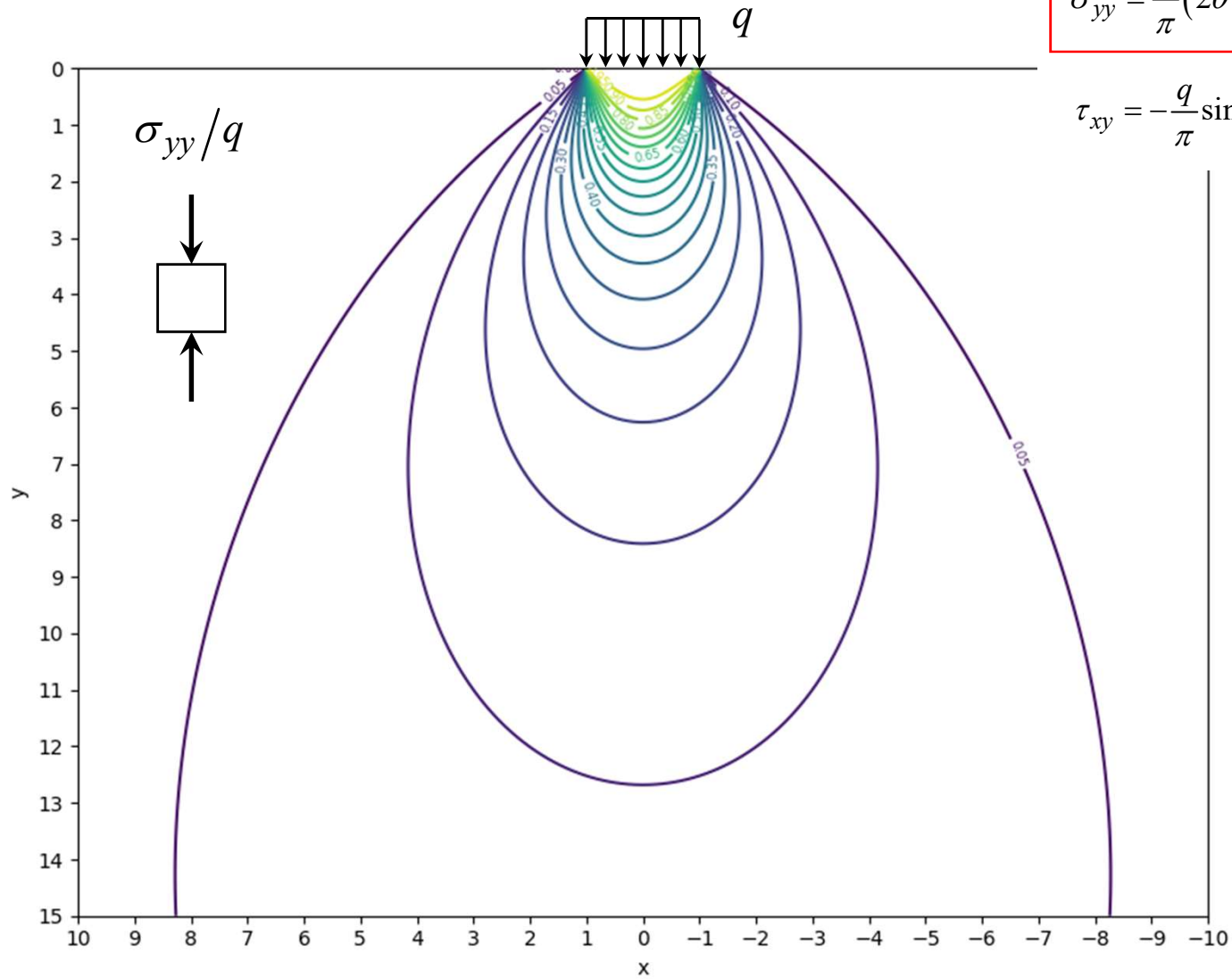


帯荷重による地盤内応力

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{\pi} (2\theta - \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{q}{\pi} (2\theta + \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{\pi} \sin 2\theta \sin 2\varphi$$

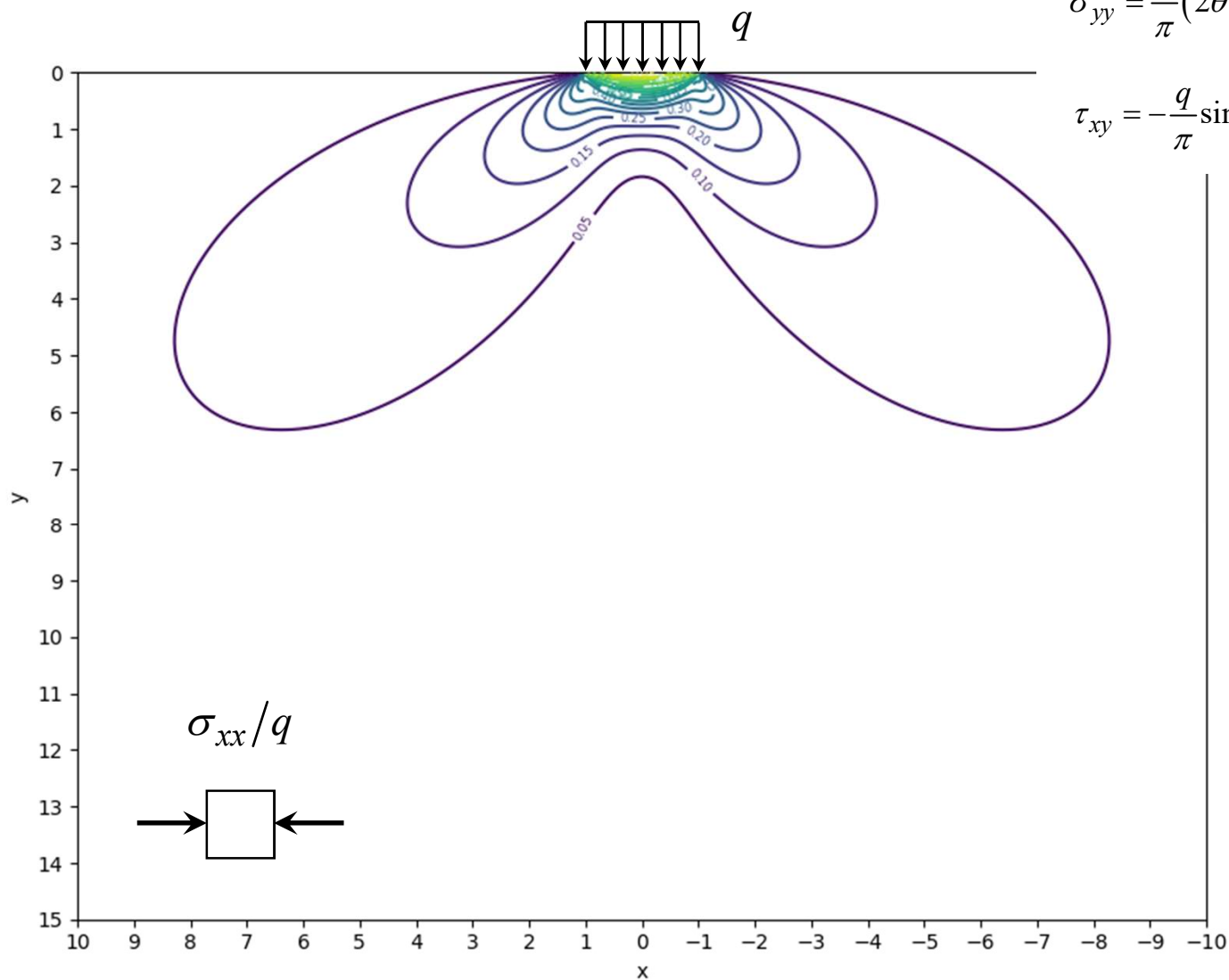


帯荷重による地盤内応力

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{\pi} (2\theta - \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{q}{\pi} (2\theta + \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{\pi} \sin 2\theta \sin 2\varphi$$

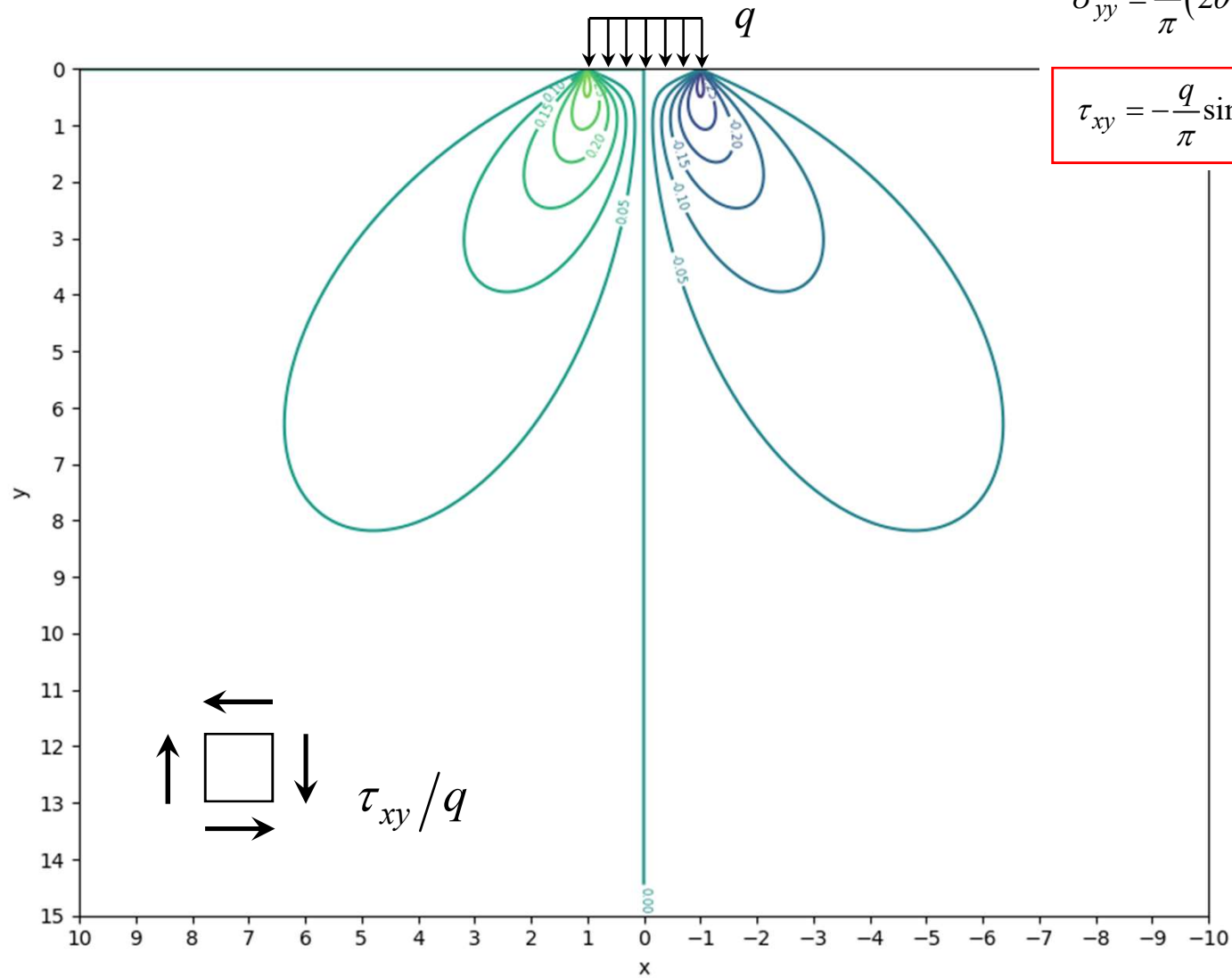


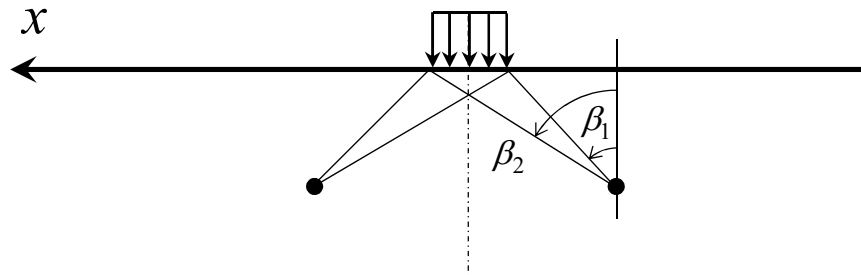
帯荷重による地盤内応力

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{\pi} (2\theta - \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{q}{\pi} (2\theta + \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{\pi} \sin 2\theta \sin 2\varphi$$

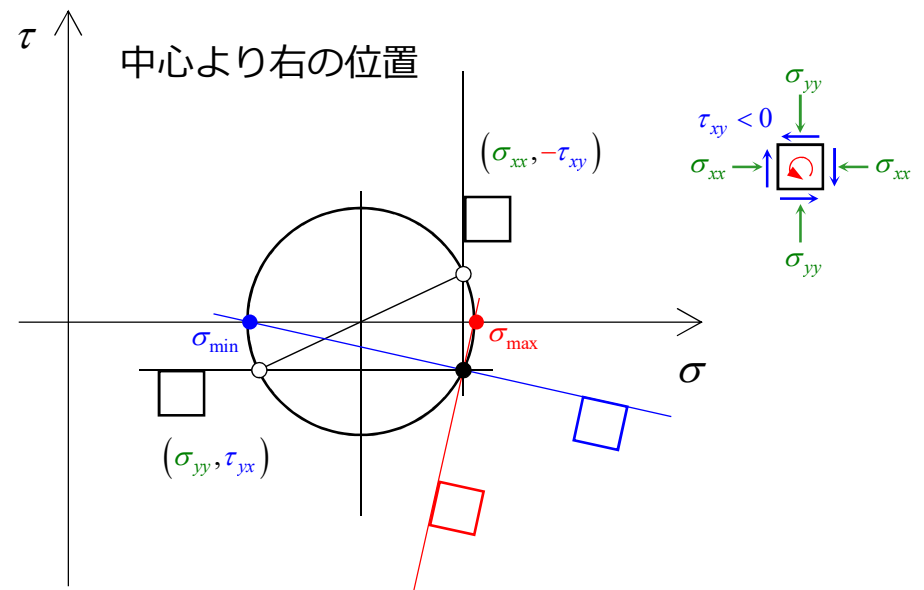
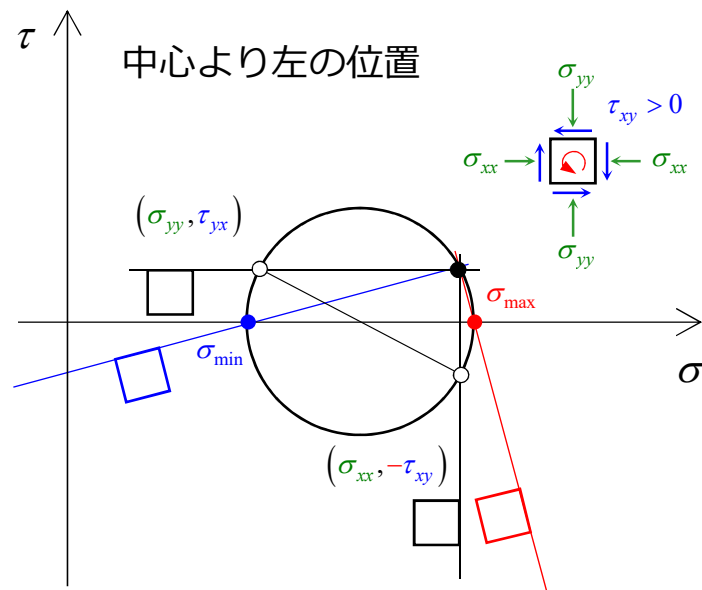




$$\sigma_{xx} = \frac{q}{\pi} (2\theta - \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{q}{\pi} (2\theta + \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{\pi} \sin 2\theta \sin 2\varphi$$



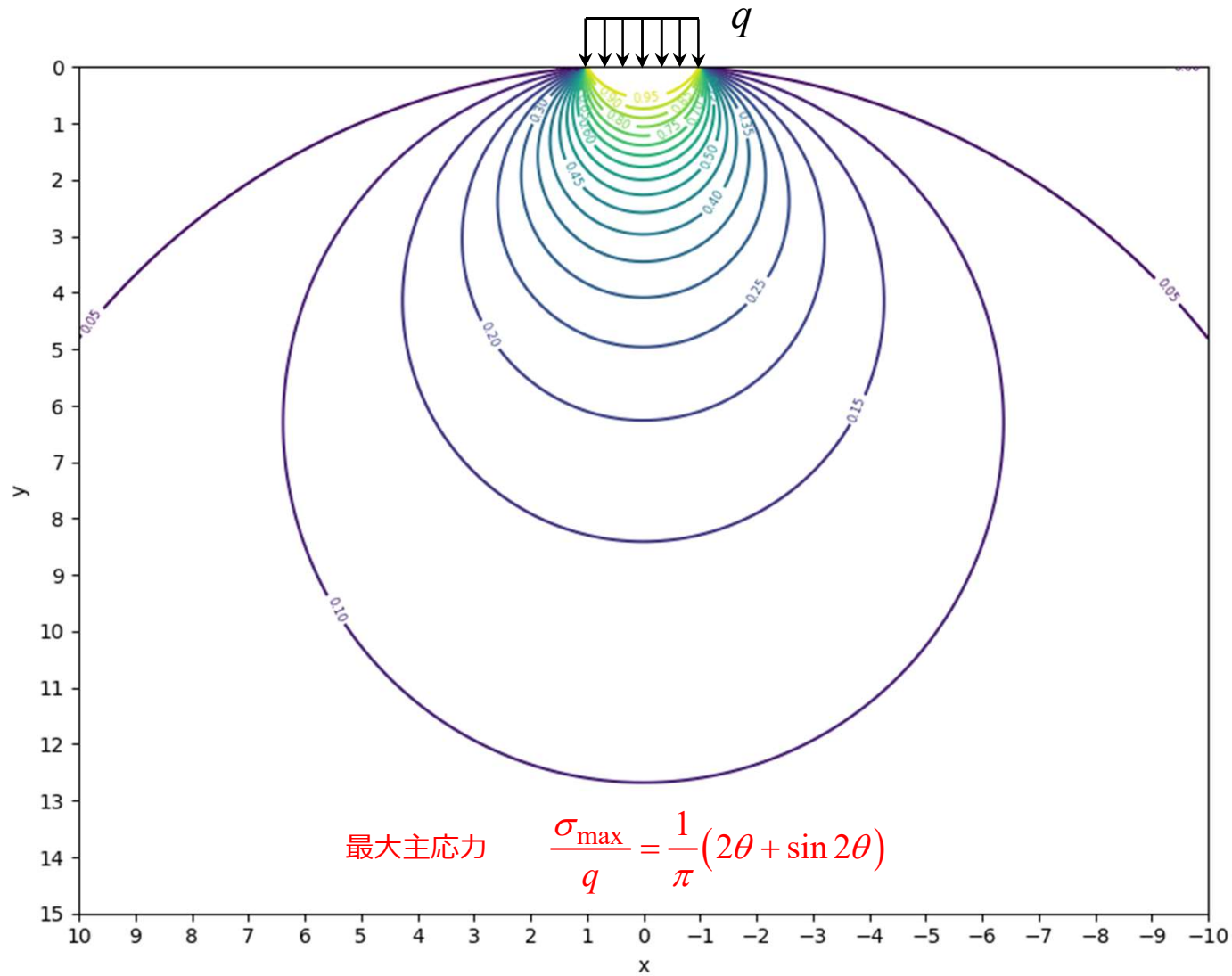
モール円の中心 $\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{q}{\pi} 2\theta$

モール円の半径 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{q}{\pi} \sin 2\theta$

最大主応力 $\sigma_{\max} = \frac{q}{\pi} (2\theta + \sin 2\theta)$

最小主応力 $\sigma_{\min} = \frac{q}{\pi} (2\theta - \sin 2\theta)$

帯荷重による地盤内応力



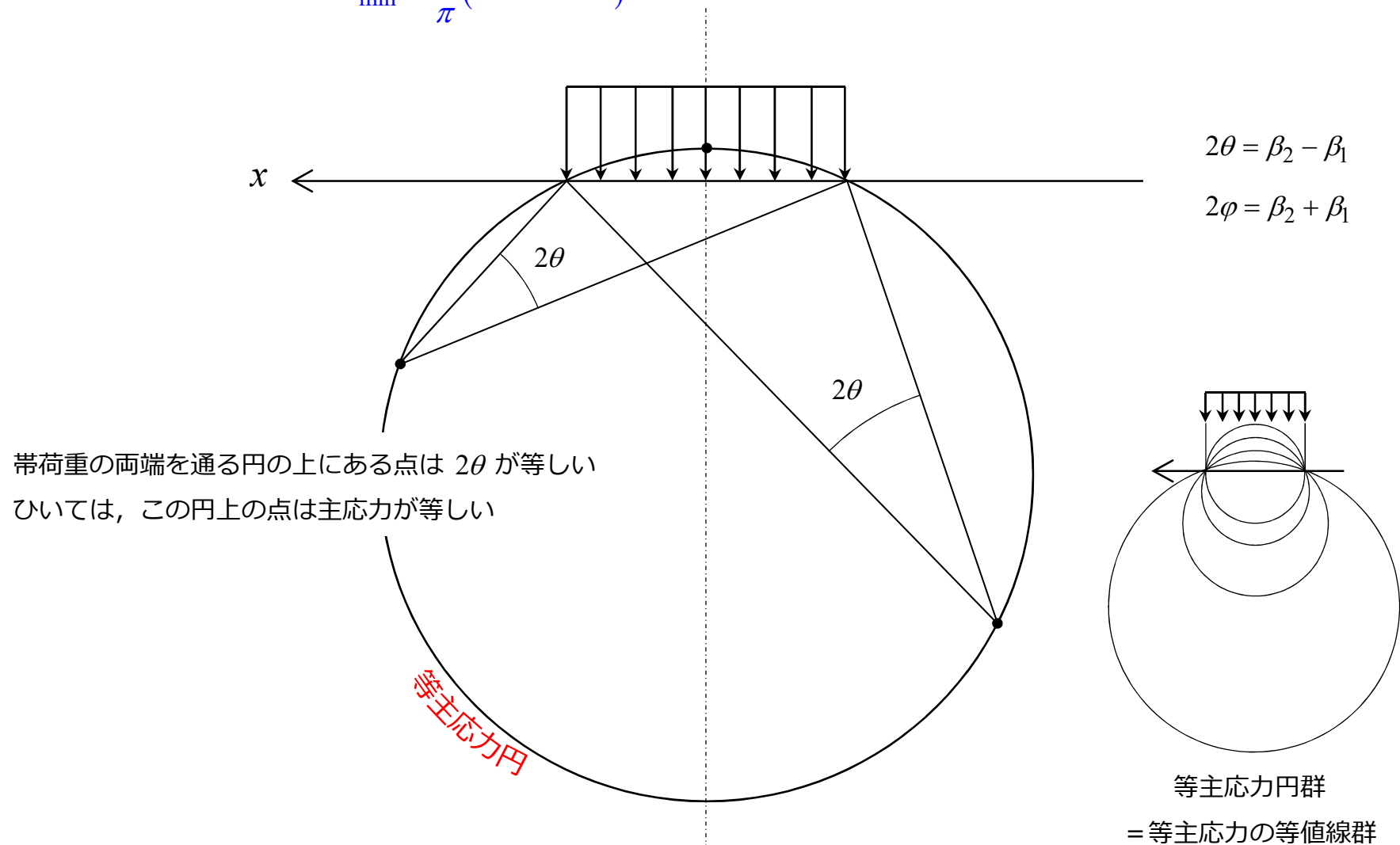
最大主応力 $\sigma_{\max} = \frac{q}{\pi}(2\theta + \sin 2\theta)$

最小主応力 $\sigma_{\min} = \frac{q}{\pi}(2\theta - \sin 2\theta)$

主応力は 2θ の関数

言い換えると,

位置が違ってても 2θ が同じであれば, 主応力は等しい



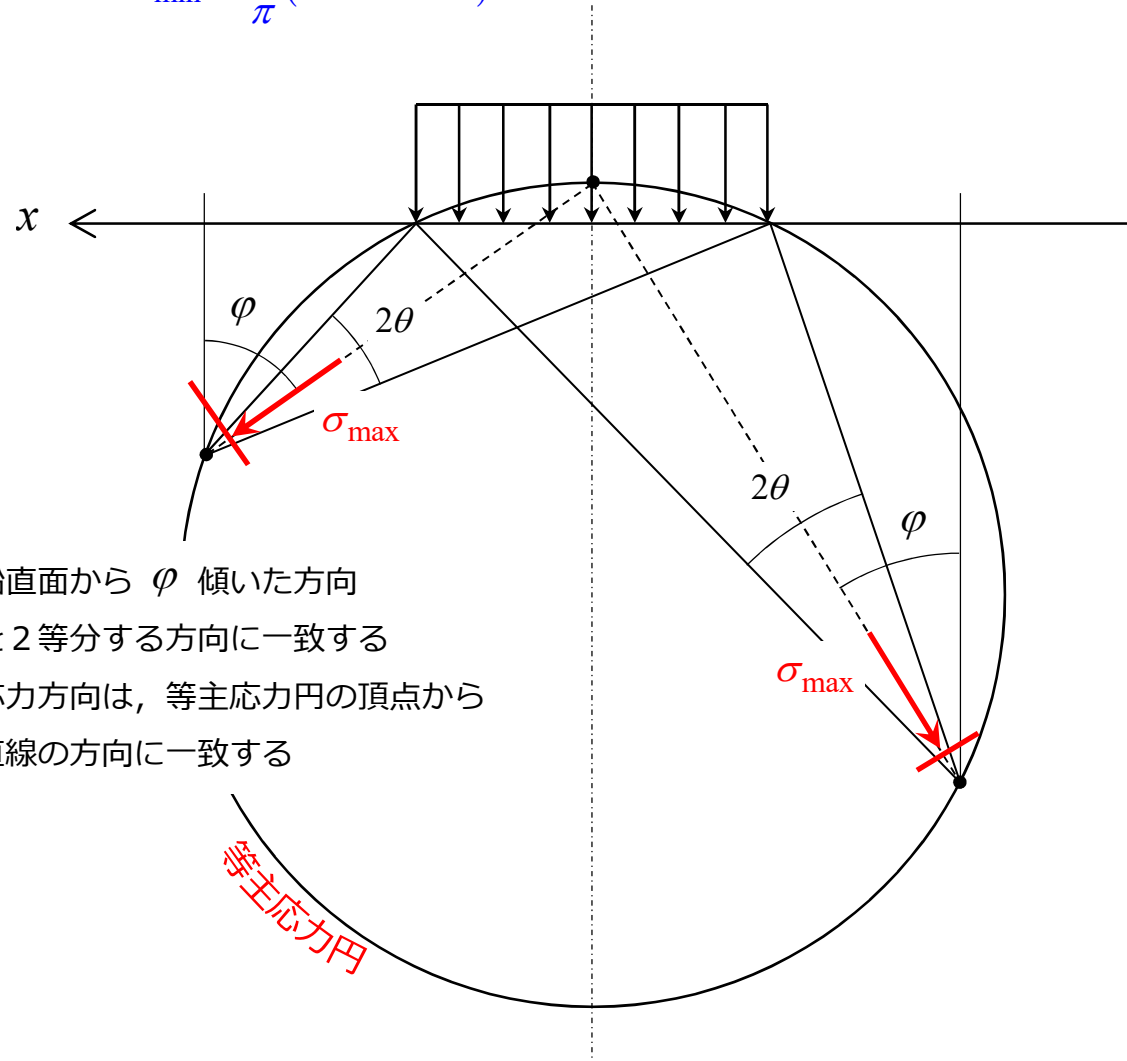
最大主応力 $\sigma_{\max} = \frac{q}{\pi}(2\theta + \sin 2\theta)$

最小主応力 $\sigma_{\min} = \frac{q}{\pi}(2\theta - \sin 2\theta)$

主応力は 2θ の関数

言い換えると,

位置が違ってても 2θ が同じであれば, 主応力は等しい



$$2\theta = \beta_2 - \beta_1$$

$$2\varphi = \beta_2 + \beta_1$$

最大主応力方向は鉛直面から φ 傾いた方向
 この方向は 2θ を2等分する方向に一致する
 すなわち, 最大主応力方向は, 等主応力円の頂点から
 円上の点に向けた直線の方法に一致する

等主応力円

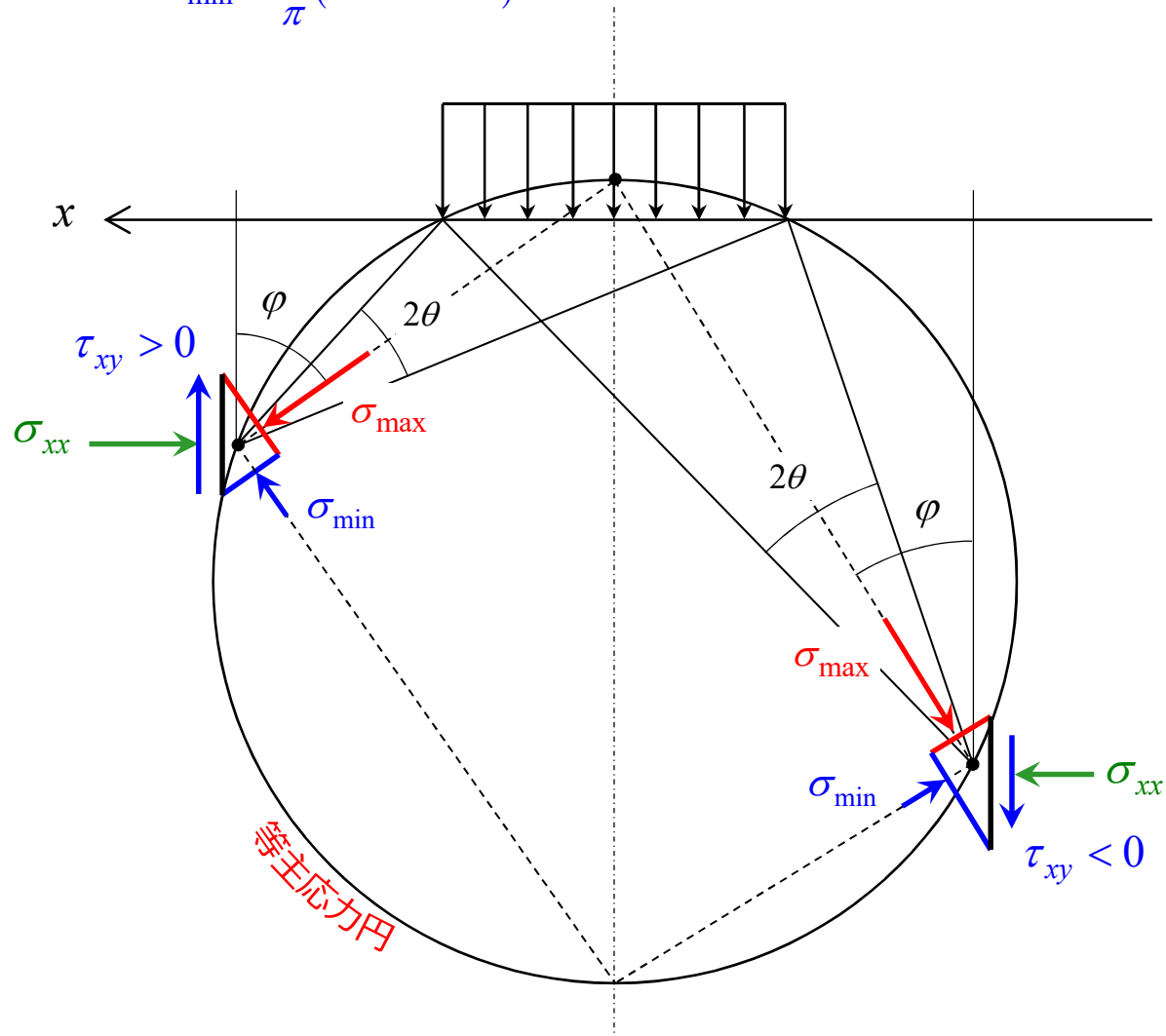
最大主応力 $\sigma_{\max} = \frac{q}{\pi}(2\theta + \sin 2\theta)$

最小主応力 $\sigma_{\min} = \frac{q}{\pi}(2\theta - \sin 2\theta)$

主応力は 2θ の関数

言い換えると,

位置が違ってても 2θ が同じであれば, 主応力は等しい



$$2\theta = \beta_2 - \beta_1$$

$$2\varphi = \beta_2 + \beta_1$$