

神戸大学工学部市民工学科

# 土質力学Ⅱ

金曜 1 & 2 限 (8:50-12:10)  
授業資料\_05

## この資料の内容

- 三軸せん断に見る土のせん断特性 ②

  - 三軸せん断の破壊条件

    - モール・クーロンの破壊規準

    - 強度定数と排水／非排水せん断強度

  - 三軸せん断応答の全体像を理解する

    - 正規圧密状態からのせん断

    - 過圧密状態からのせん断

# 破壊条件—せん断され破壊に至ったら (1)

Drained shear

例えば，側圧一定の排水せん断を考える。

せん断前は，等方圧密状態（背圧： $u_b$ ）。

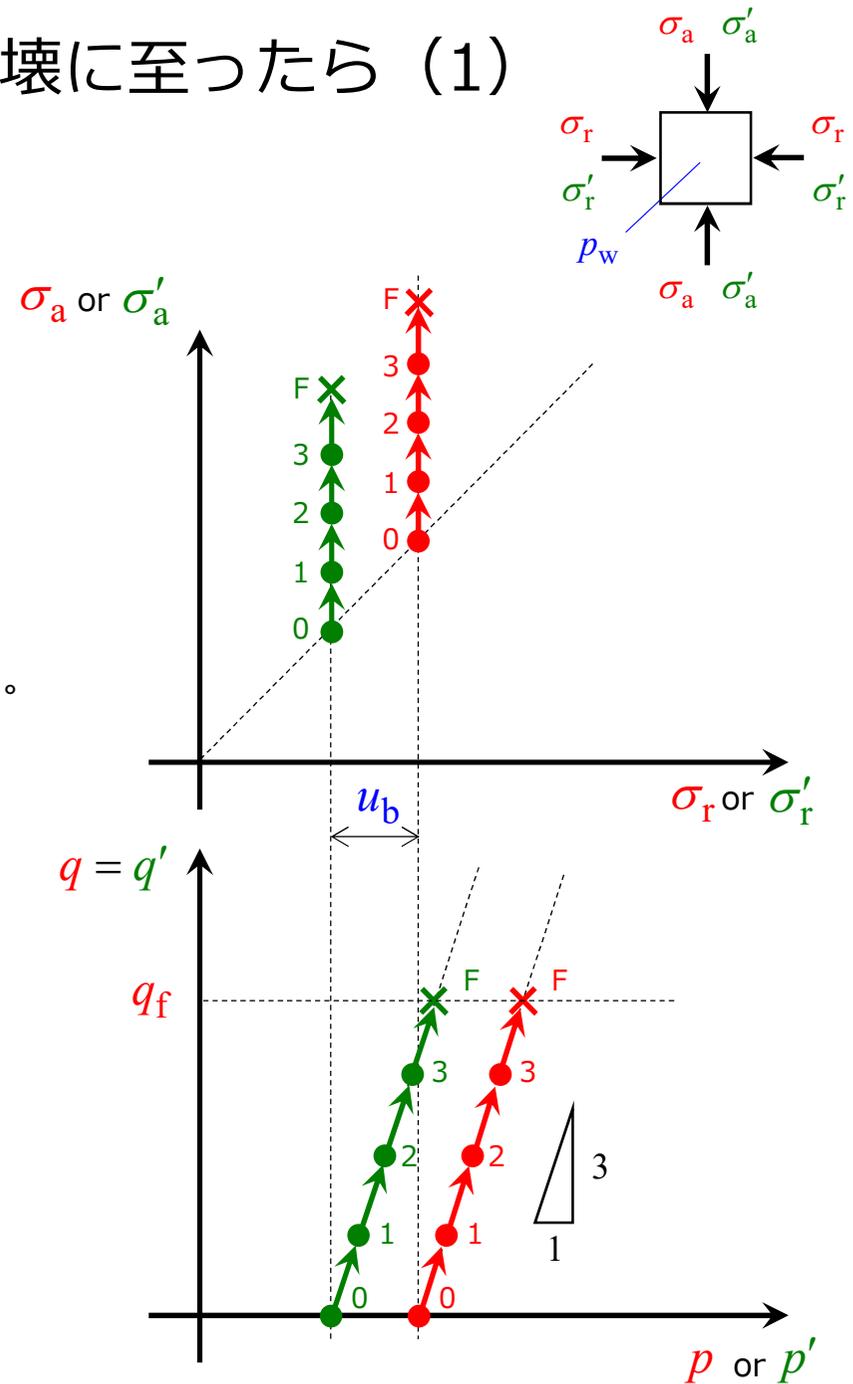
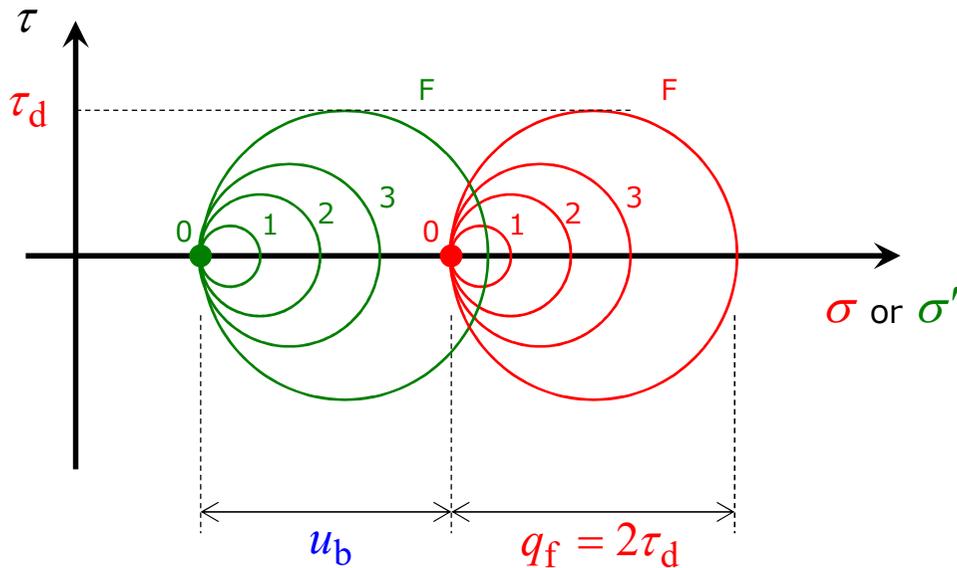
せん断過程の応力経路は，前回説明の通り。

どこまでも主応力差を与え続けられるわけではなく，  
やがて破壊する = モール円の拡大限界。

破壊時のモール円の半径を「せん断強度」と呼ぶ。

排水せん断による強度は特に「排水せん断強度」。

記号は  $\tau_f$  or  $\tau_d$



# 破壊条件—せん断され破壊に至ったら (2)

Undrained shear

一方，側圧一定の非排水せん断を考える。

せん断前は，等方圧密状態（背圧： $u_b$ ）。

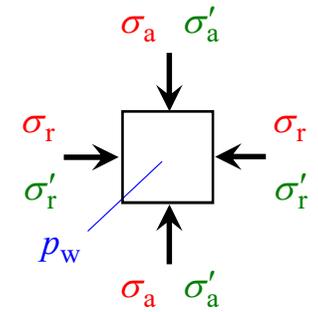
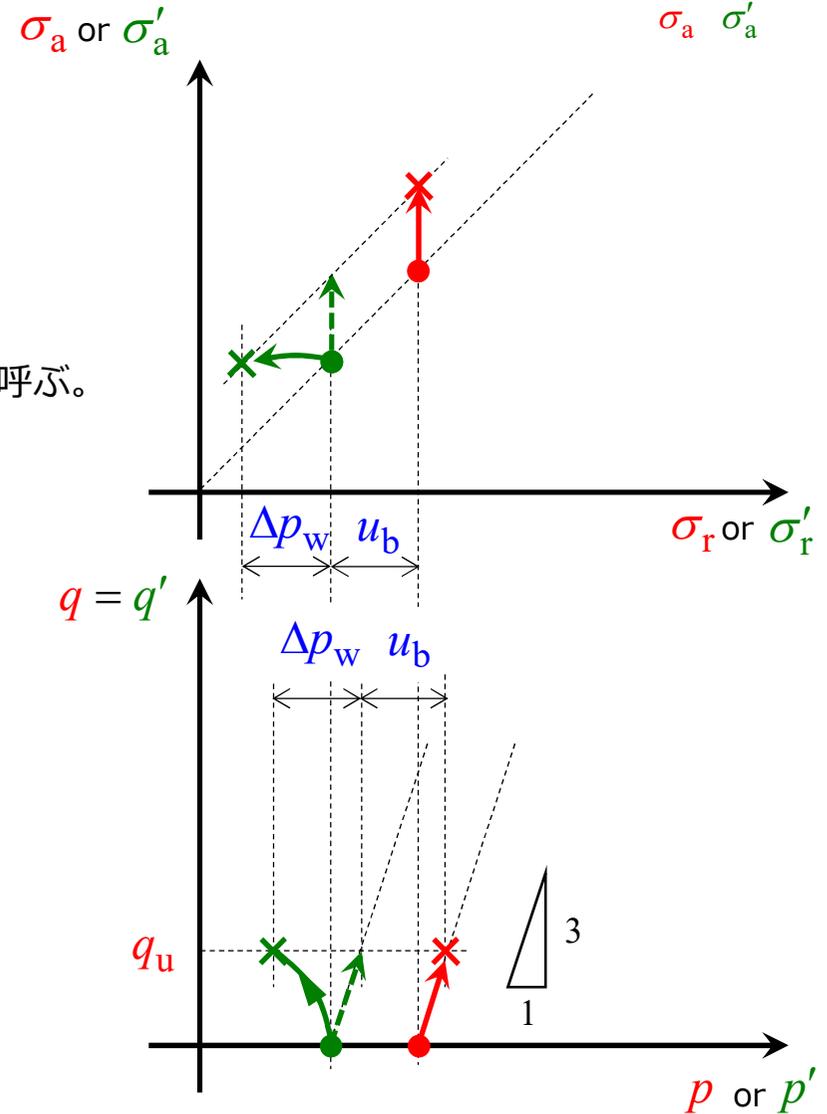
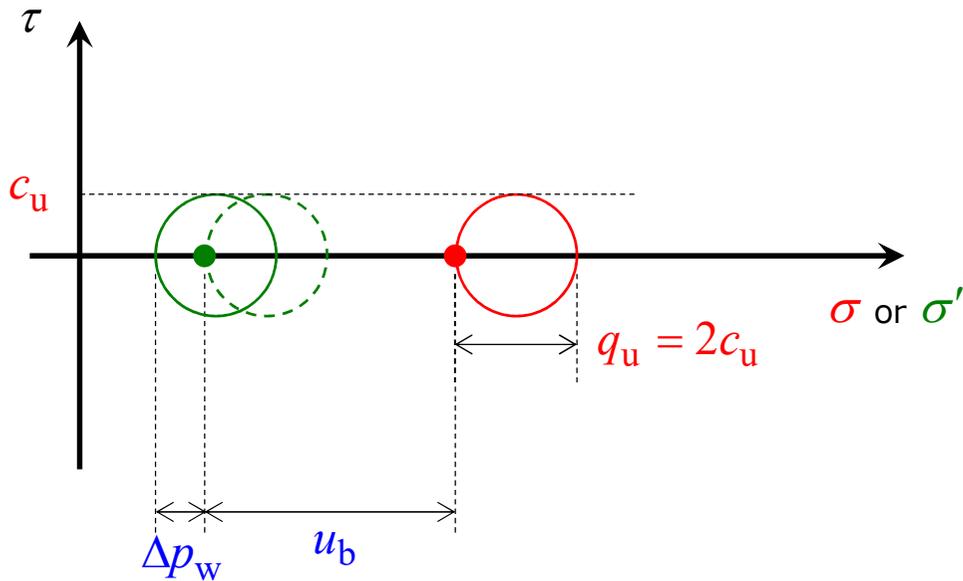
また，正規圧密された状態を想定する。

正規圧密状態からのせん断は，

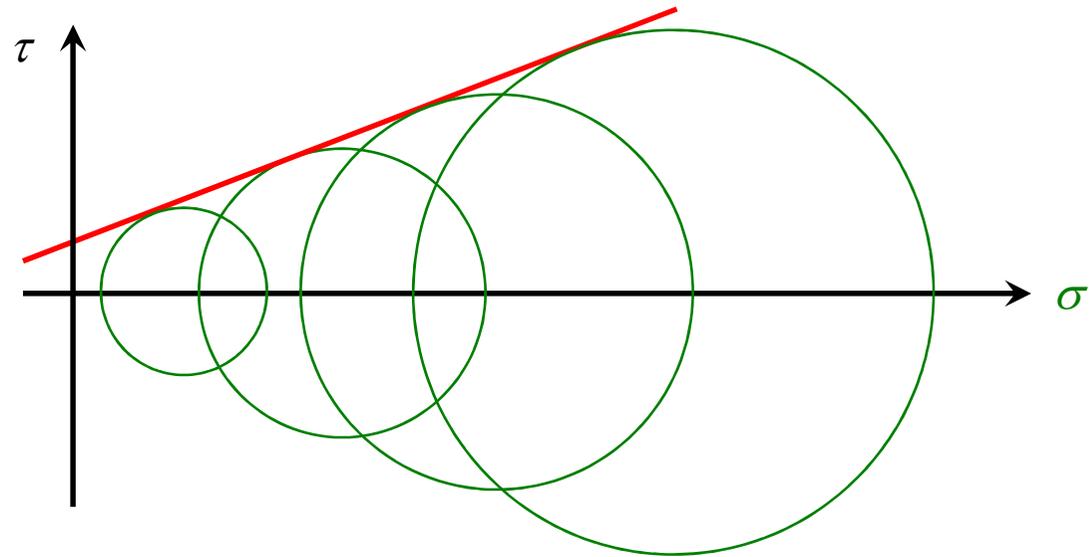
負のダイレイタンスを伴う = 間隙水圧上昇： $\Delta p_w$ 。

非排水せん断による強度を「非排水せん断強度」と呼ぶ。

記号は  $c_u$



## 破壊条件—せん断され破壊に至ったら (3)



ある等方圧密状態からせん断すると、破壊時のモールの有効応力円が得られる。

異なる幾つかの等方圧密状態からせん断すると（せん断試験をたくさん行くと）

破壊時のモールの有効応力円がそれぞれ得られる。

これら破壊時のモールの有効応力円は（曲線となる場合もあるが）一つの直線に接する。

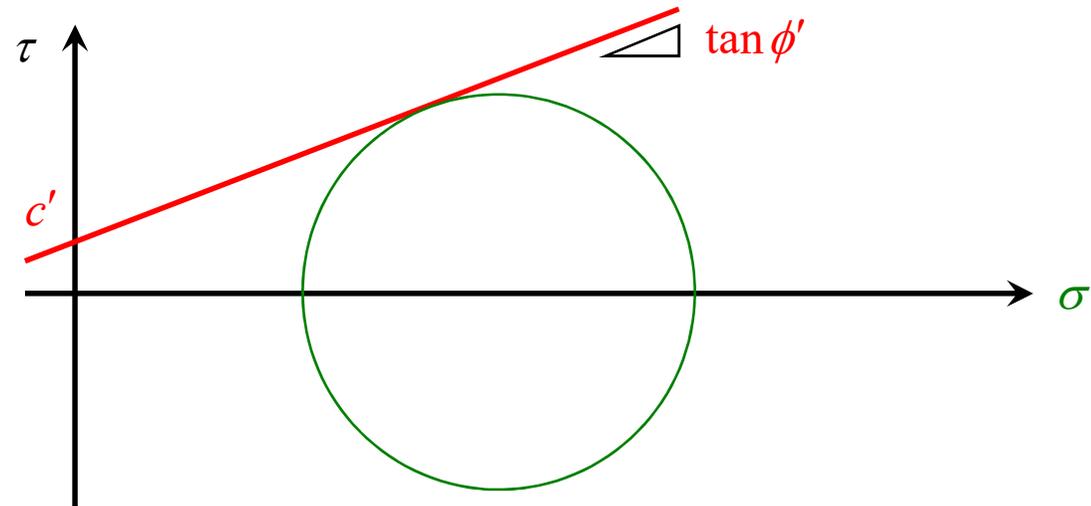
この線を「破壊包絡線」と呼ぶ。

状態に依ることもあるが、基本、「破壊包絡線」は材料に固有。

つまり、この線が分かっているれば、

「モール円の拡大限界が分かる」 = 「強度を知る」ことができる。

## 破壊条件—せん断され破壊に至ったら (4)



破壊包絡線として、クーロンの破壊条件式 (= 一面せん断の破壊条件) を用いたとき、それを「モール・クーロンの破壊条件あるいは破壊規準」と呼ぶ。式は

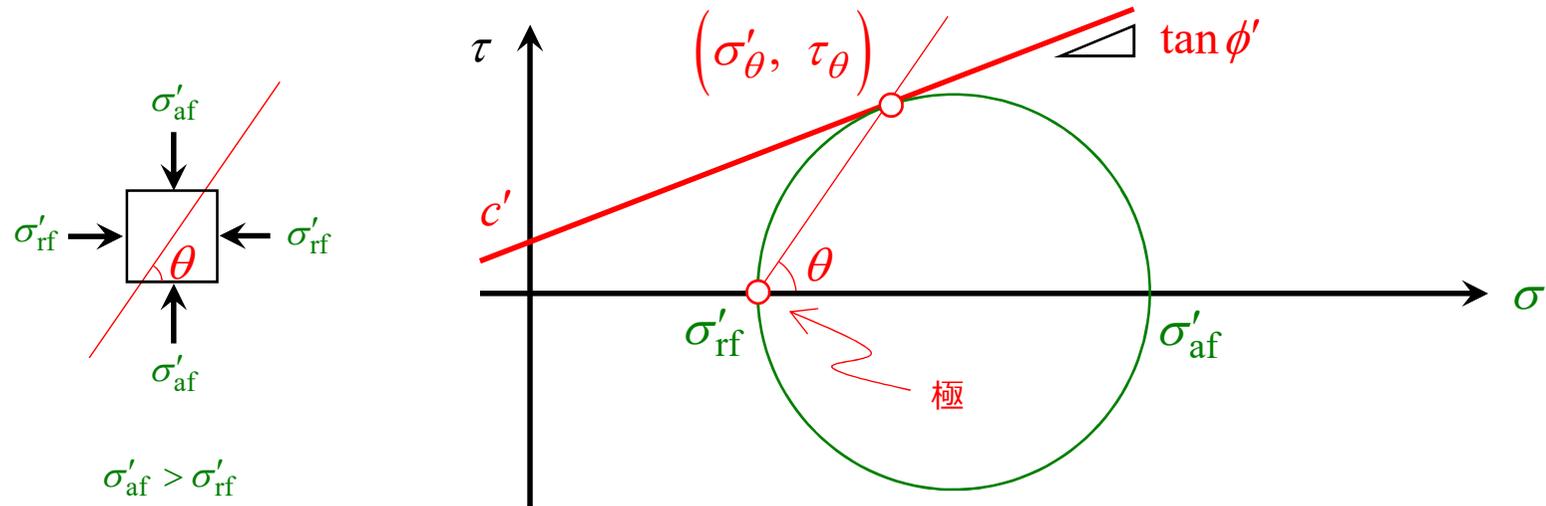
$$\tau = c' + \sigma' \tan \phi'$$

有効応力円に接する破壊線であるから「有効」を強調して、

$c'$  : 有効粘着力       $\phi'$  : 有効内部摩擦角

と呼称。また、これらを強度定数と呼ぶ。

## 破壊条件—せん断され破壊に至ったら (5)



「破壊時にモールの有効応力円がクーロンの破壊線に接する」というのはどういうことか？

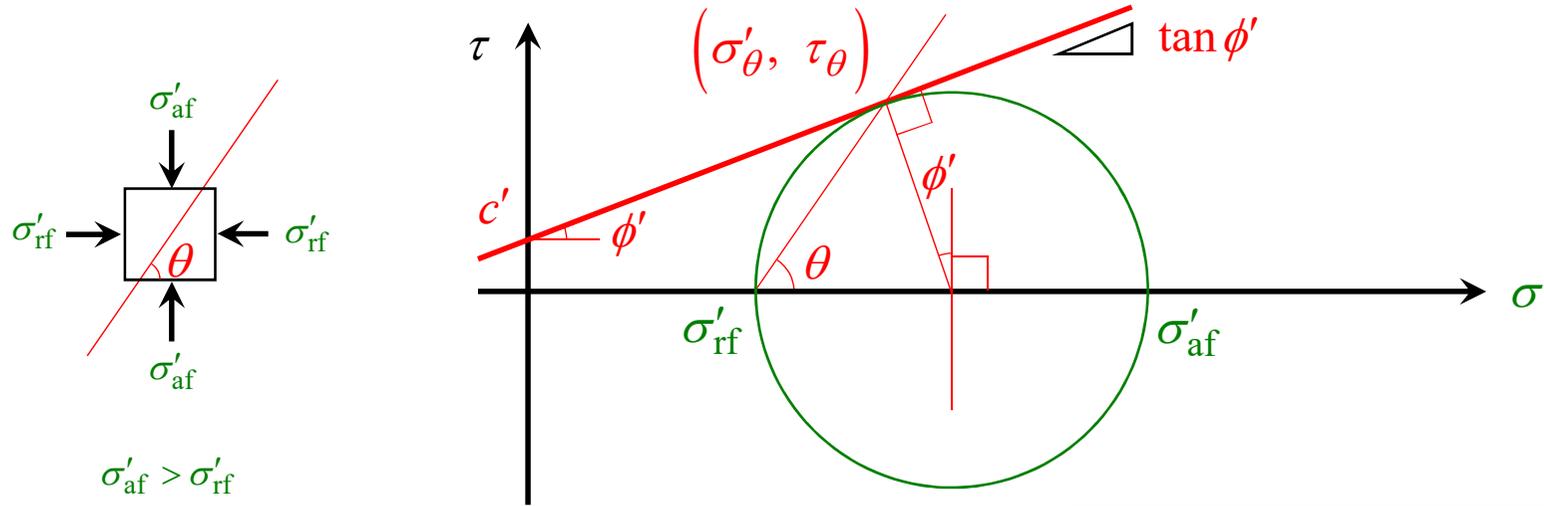
水平面から角度  $\theta$  回転した面には

「クーロンの破壊条件」を満足する応力  $(\sigma'_\theta, \tau_\theta)$  が作用している。

逆に言えば、せん断されモールの円が拡大する内に、

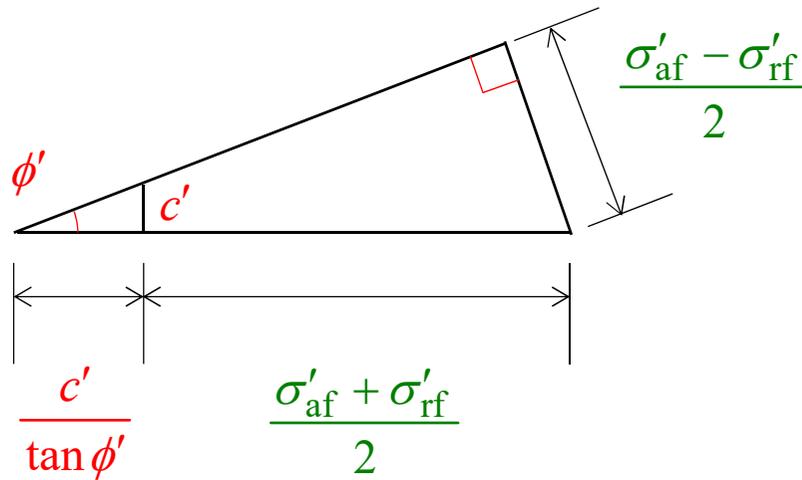
ある一面がクーロンの破壊条件を満足してしまった、ということ。

# 破壊条件—せん断され破壊に至ったら (6)



クーロンの破壊条件を満足する面に作用する面の角度

$$\theta = \frac{\phi'}{2} + \frac{\pi}{4}$$



左の直角三角形より

$$\sigma'_{af} - \sigma'_{rf} = 2c' \cos \phi' + (\sigma'_{af} + \sigma'_{rf}) \sin \phi'$$

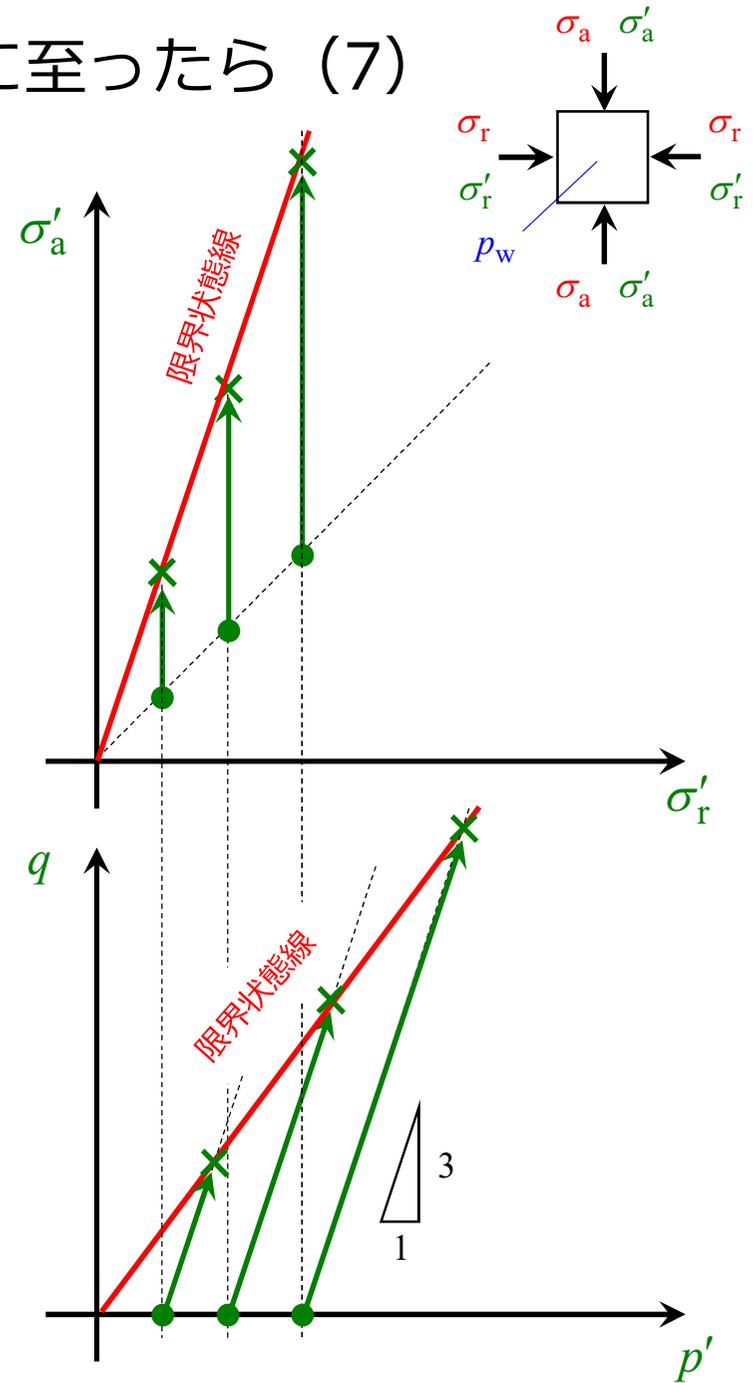
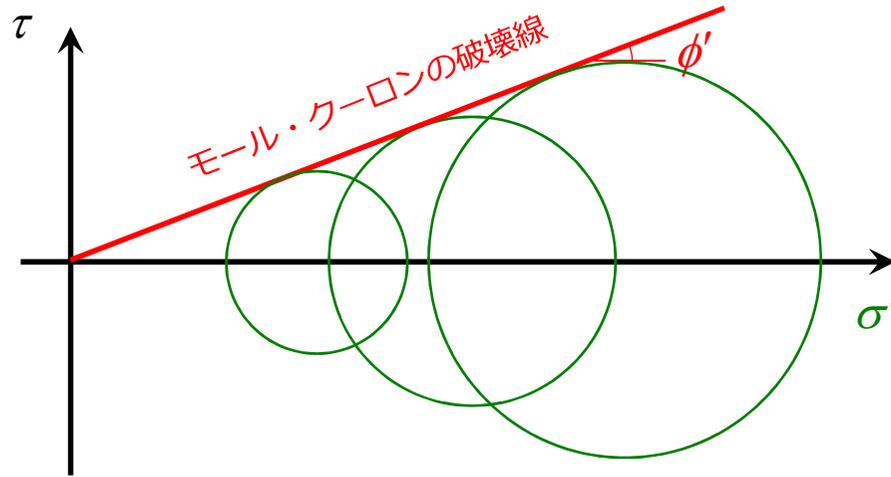
: 破壊規準を破壊時の有効主応力に表示した式

特に  $c' = 0$  のとき

$$\sin \phi' = \frac{\sigma'_{af} - \sigma'_{rf}}{\sigma'_{af} + \sigma'_{rf}} \iff \frac{\sigma'_{rf}}{\sigma'_{af}} = \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'}$$

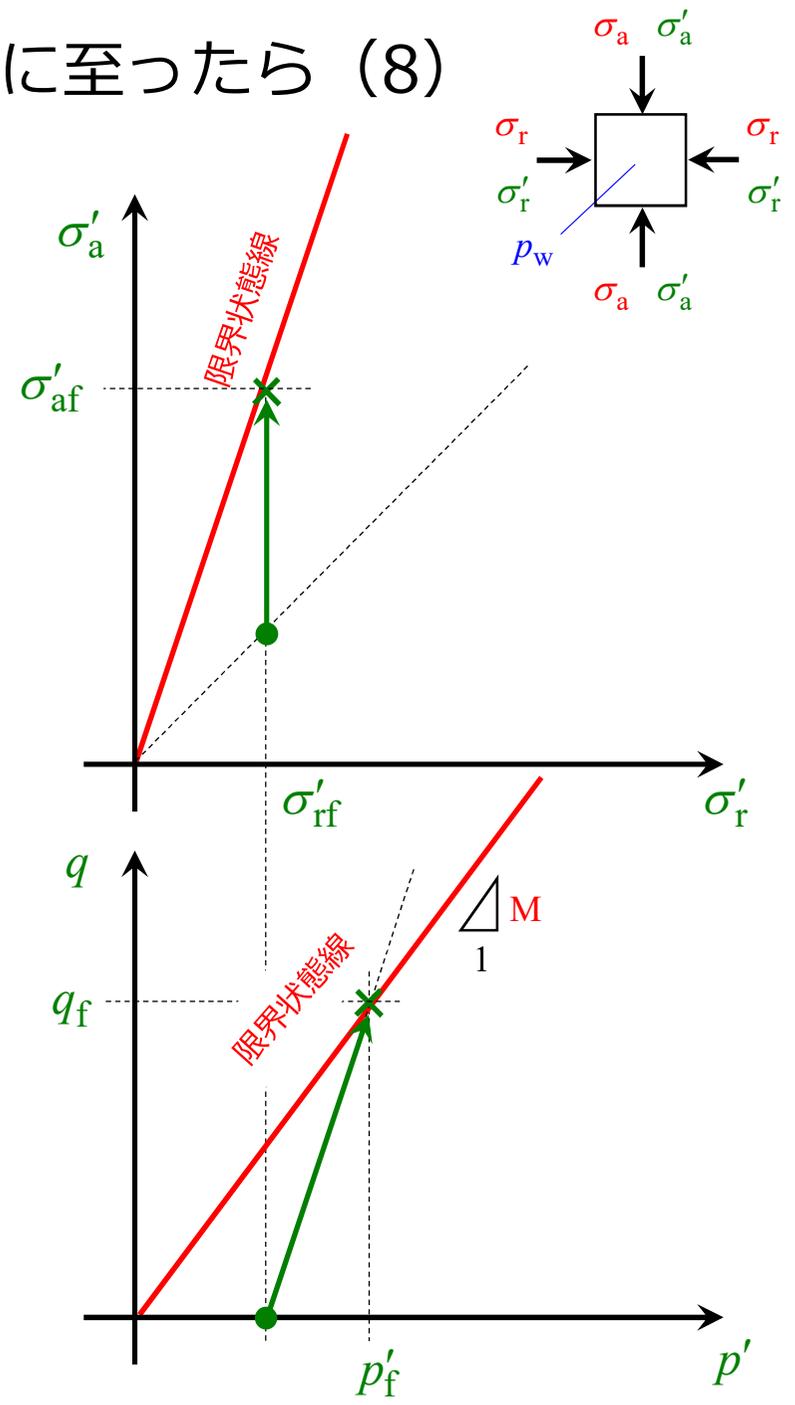
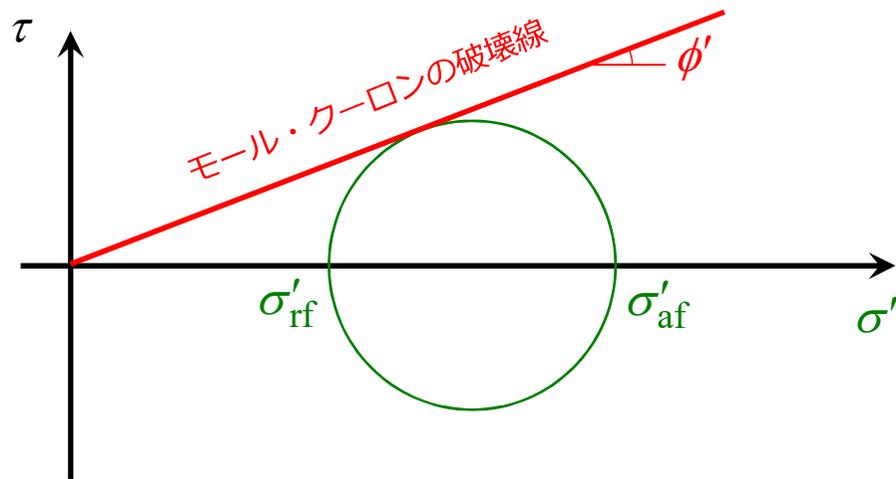
# 破壊条件—せん断され破壊に至ったら (7)

正規圧密された粘土をせん断すると,  $c' = 0$  になる。  
 複数の正規圧密された粘土について破壊状態を得ると,  
 いずれのモール円もモール・クーロンの破壊線に接する。  
 右の図では, 複数の破壊状態点が全て,  
 原点を通る直線を通ることになる。  
 この直線を「**限界状態線**」と呼ぶ。



# 破壊条件—せん断され破壊に至ったら (8)

特に,  $p'-q$  平面上での「限界状態線」の勾配を「限界応力比」と呼ぶ。記号は,  $M$  (ミュー)。



# 破壊条件—せん断され破壊に至ったら (8)

特に,  $p' - q$  平面上での「限界状態線」の勾配を「限界応力比」と呼ぶ。記号は,  $M$  (ミュー)。

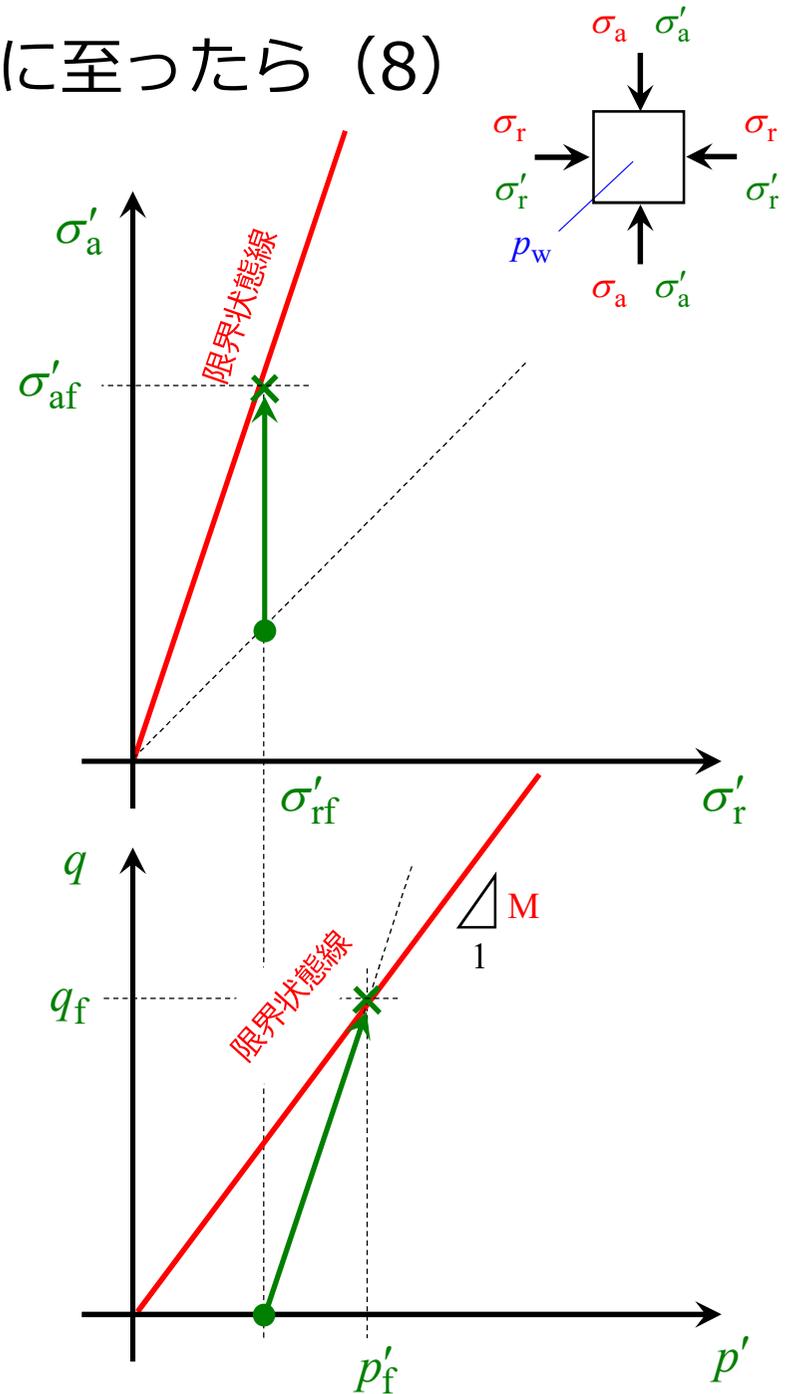
$$M = \frac{q_f}{p'_f} = \frac{\sigma'_{af} - \sigma'_{rf}}{\frac{1}{3}(\sigma'_{af} + 2\sigma'_{rf})} = 3 \frac{1 - (\sigma'_{rf}/\sigma'_{af})}{1 + 2(\sigma'_{rf}/\sigma'_{af})}$$

$\frac{\sigma'_{rf}}{\sigma'_{af}} = \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'}$	を代入
---	-----

$$M = 3 \frac{1 - \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'}}{1 + 2 \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'}} = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}$$

「限界応力比」と「有効内部摩擦角」の関係

$M = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}$	⇔	$\sin \phi' = \frac{3M}{6 + M}$
---	---	---------------------------------



## 例題5-2

飽和した粘土供試体を等方圧密した後、側圧一定で非排水せん断した。等方圧密過程では、背圧をかけずに圧密圧力 100 kPa まで圧密した。非排水せん断過程では、軸圧が 172 kPa に達したとき、供試体は破壊し、このときの間隙水圧は 64 kPa であった。この土の有効内部摩擦角と限界応力比を求めよ。

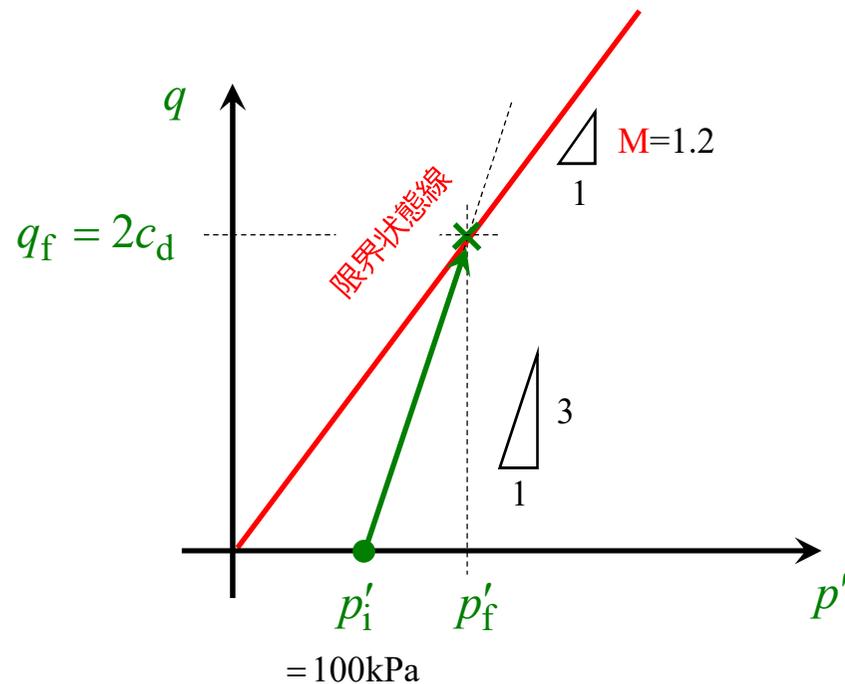
	全応力				間隙水圧	有効応力			
	$\sigma_a$	$\sigma_r$	$p$	$q$	$p_w$	$\sigma'_a$	$\sigma'_r$	$p'$	$q$
①圧密後	100	100	100	0	0	100	100	100	0
増分	72	0	24	72	64	8	-64	-40	72
②破壊時	172	100	124	72	64	108	36	60	72

$$\text{有効内部摩擦角： } \sin \phi' = \frac{\sigma'_{af} - \sigma'_{rf}}{\sigma'_{af} + \sigma'_{rf}} = \frac{108 - 36}{108 + 36} = \frac{72}{144} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi' = 30^\circ$$

$$\text{限界応力比： } M = \frac{q_f}{p'_f} = \frac{72}{60} = 1.2$$

## 例題5-3

例題6-2と同じ飽和粘土を背圧をかけずに圧密圧力 100 kPa まで等方圧密し，側圧一定で排水せん断した。排水せん断強度を求めなさい。



限界状態線： $q_f = Mp'_f$

排水せん断経路： $q_f = 3p'_f - 3p'_i$

上2つの式から  $p'_f$  を消去すると

$$q_f = 3 \frac{q_f}{M} - 3p'_i \Rightarrow q_f = \frac{3M}{3-M} p'_i$$

排水せん断強度は

$$c_d = \frac{1}{2} q_f = \frac{1}{2} \frac{3M}{3-M} p'_i = 100 \text{ (kPa)}$$

## この資料の内容

- 三軸せん断に見る土のせん断特性 ②

三軸せん断の破壊条件

モール・クーロンの破壊規準

強度定数と排水／非排水せん断強度

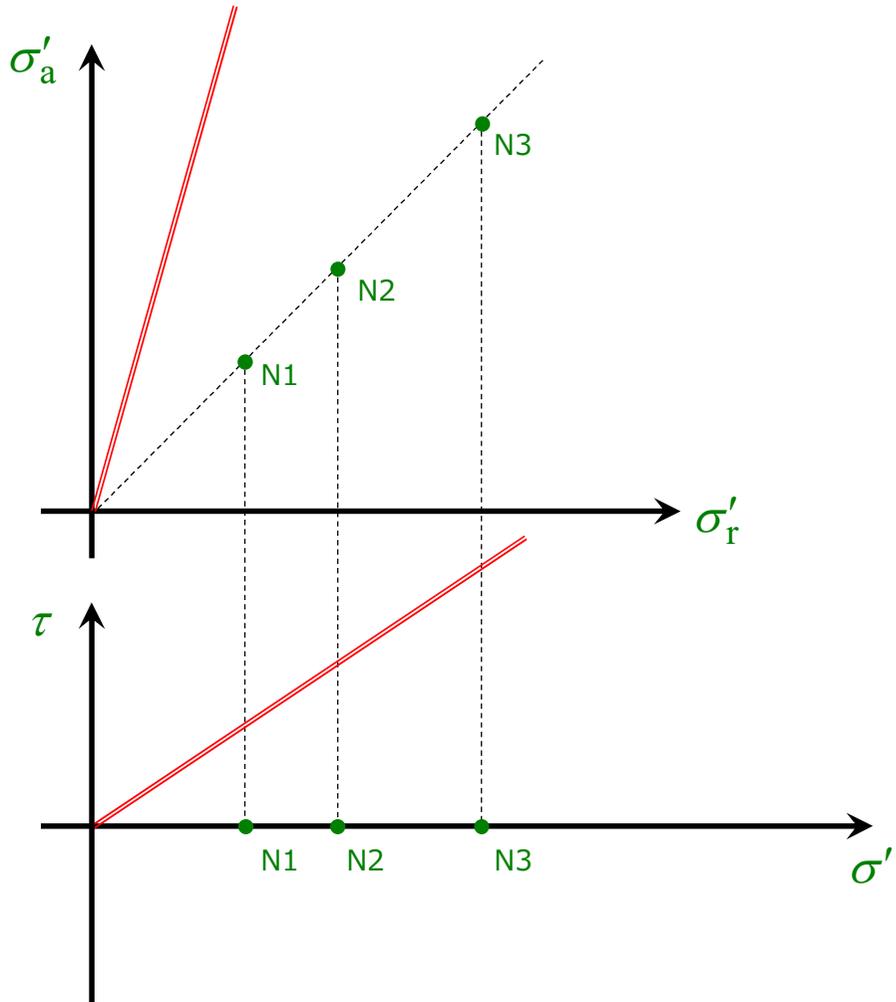
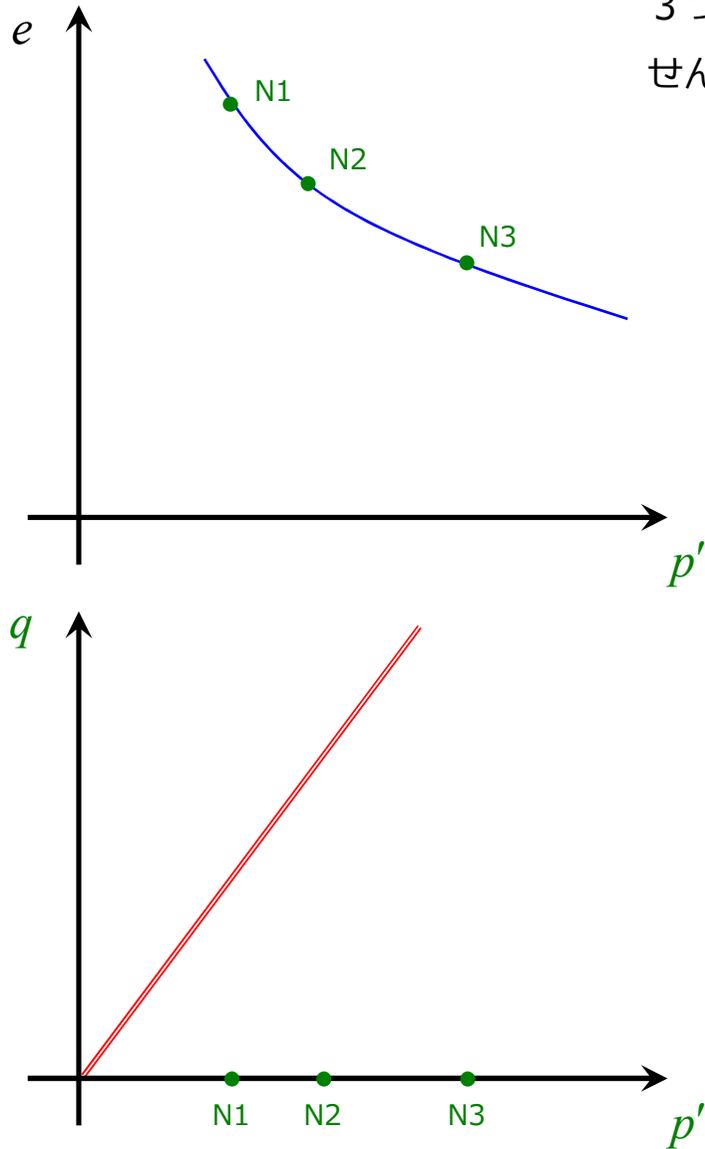
三軸せん断応答の全体像を理解する

正規圧密状態からのせん断

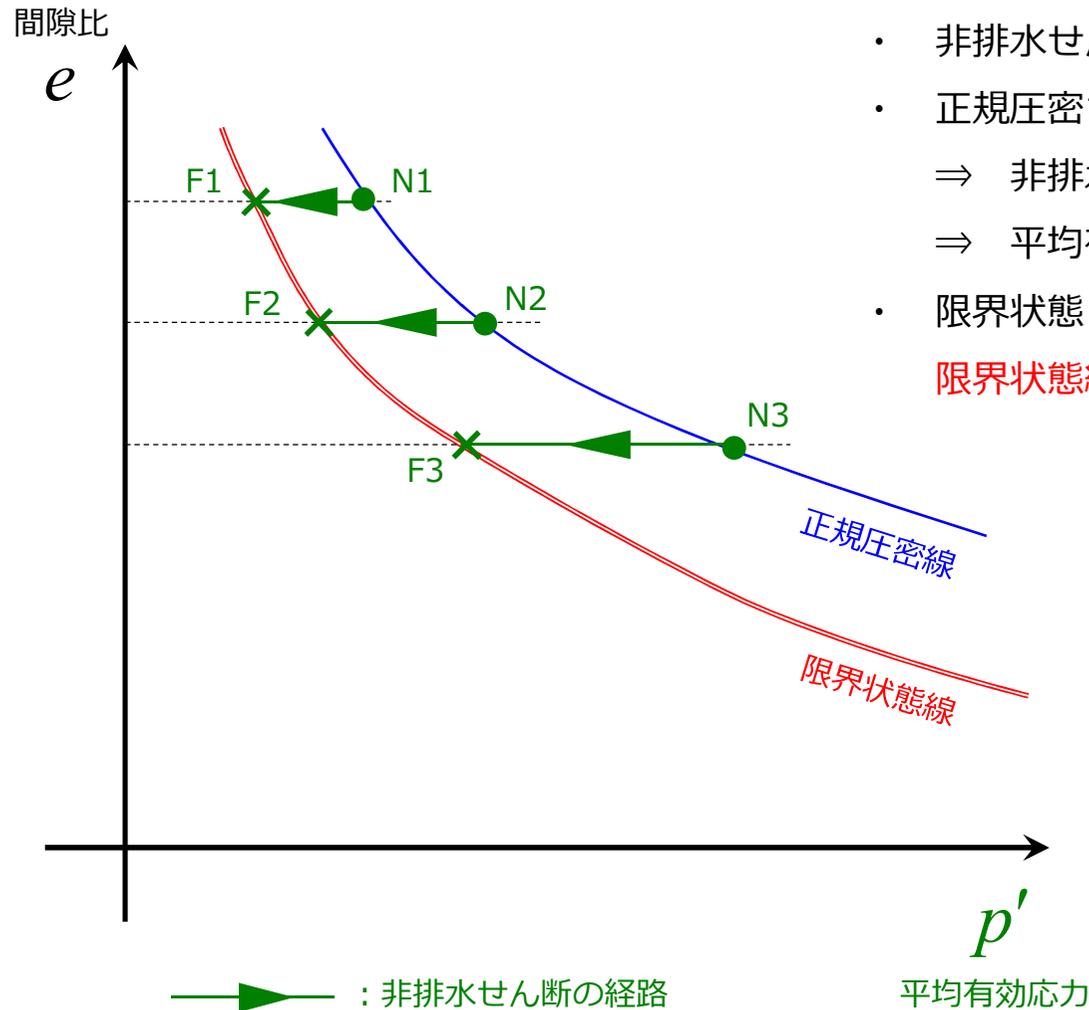
過圧密状態からのせん断

# 正規圧密状態からのせん断—せん断前（圧密後）

3つの正規圧密状態（N1, N2, N3）からのせん断を考える。  
せん断条件は2通り： 非排水せん断 と 排水せん断

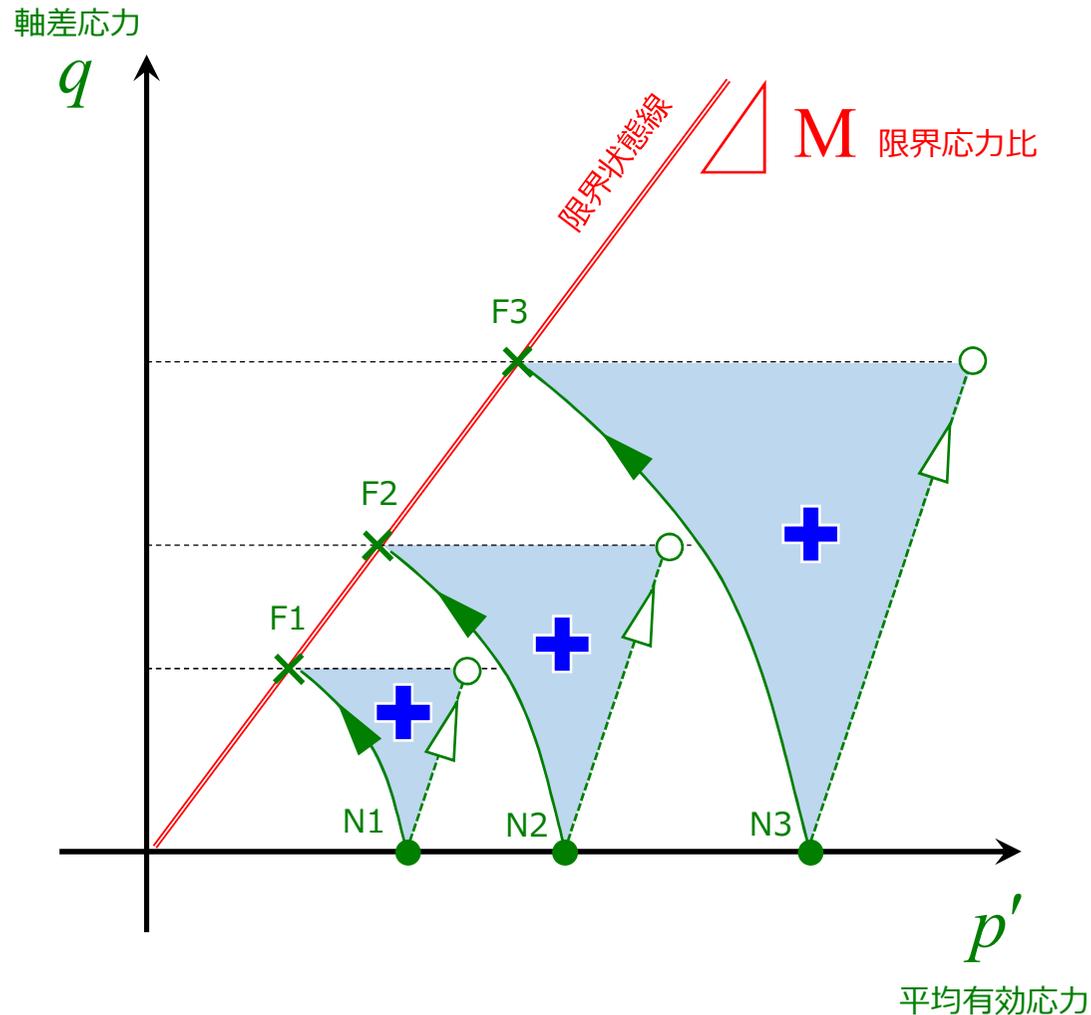


# 正規圧密状態からのせん断—非排水せん断 (1)



- 非排水せん断 = 体積一定 = 間隙比変化なし
- 正規圧密された土：負のダイレイタンシー  
⇒ 非排水条件では間隙水圧が増  
⇒ 平均有効応力が減少し，限界状態に至る
- 限界状態（F1, F2, F3・・・）を連ねた線として  
**限界状態線**を描くことができる

## 正規圧密状態からのせん断—非排水せん断（2）

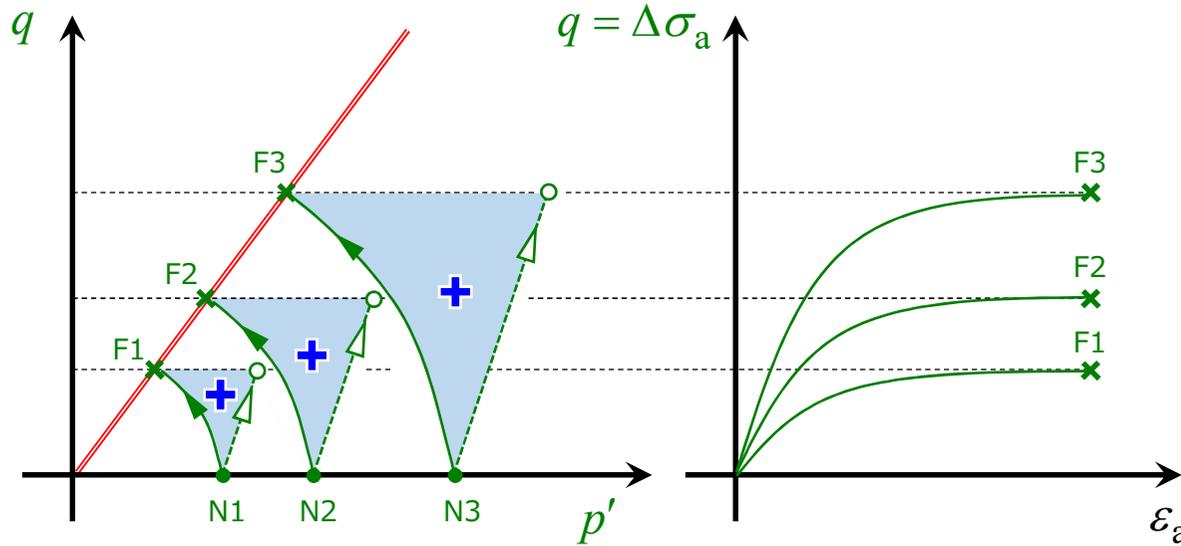


・圧密圧力が大きければ大きいほど、発生する間隙水圧も大きくなるし、非排水せん断強度も大きくなる。

結果的に、正規圧密された土は、有効応力経路が相似形になる

- ▶— : 非排水せん断の有効応力経路
- - -▶- - - : 排水せん断（側圧一定）の有効応力経路

# 正規圧密状態からのせん断—非排水せん断 (3)



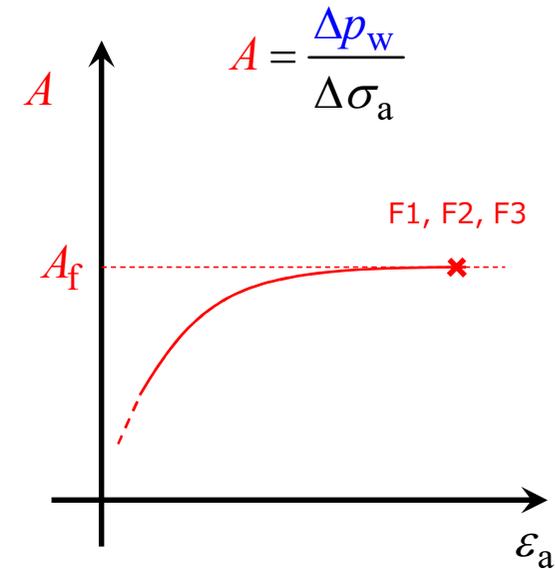
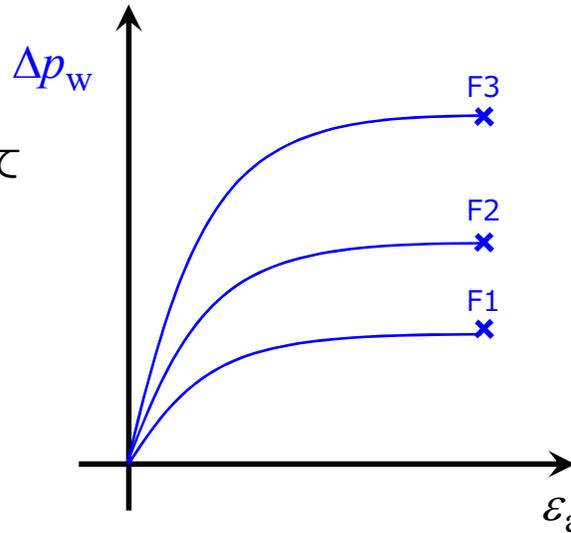
破壊時の間隙水圧係数  $A_f$

正規圧密粘土 : 0.7~1.3

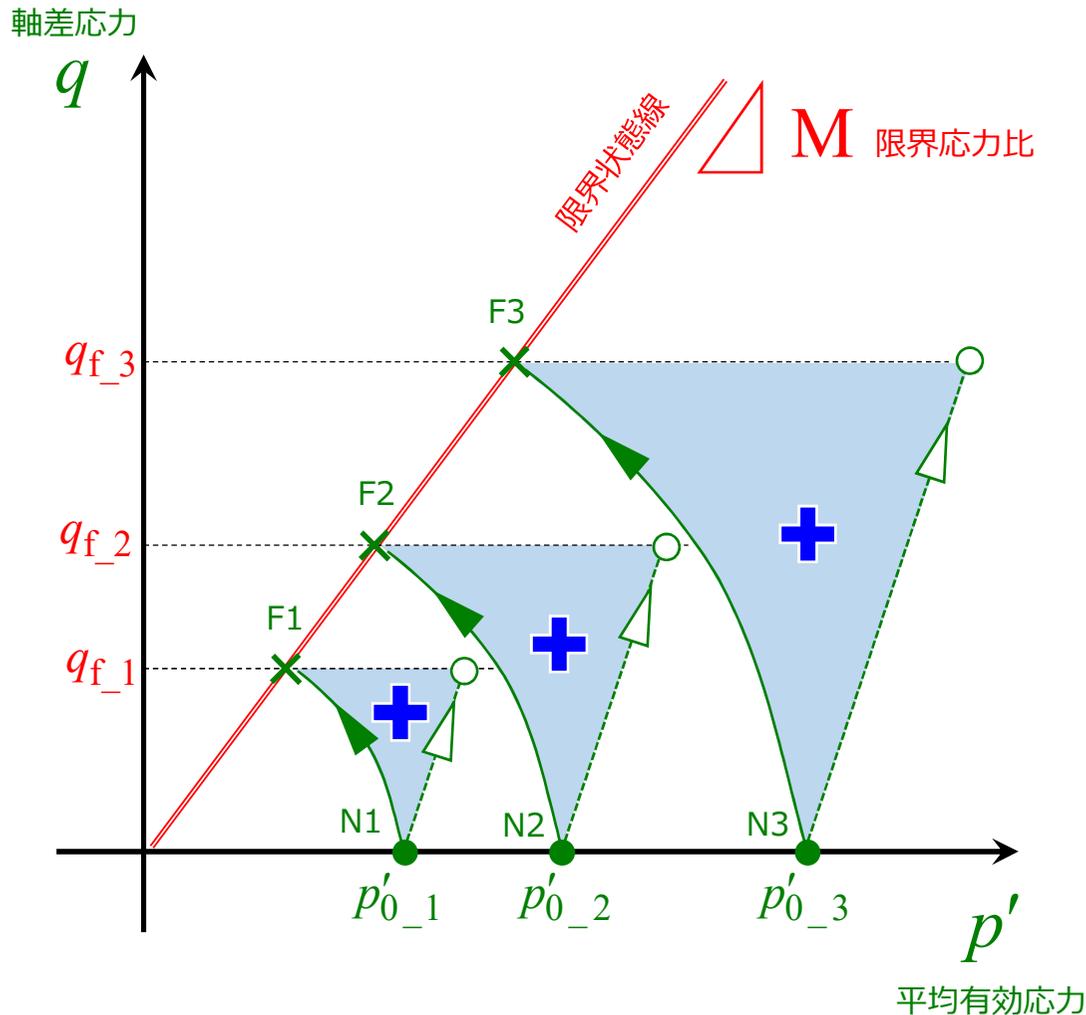
緩い砂 : 2.0~5.0

軸差応力  $q = \Delta\sigma_a$  の上昇に伴って  
間隙水圧  $\Delta p_w$  が増加

正規圧密された土であれば,  
その比である間隙水圧係数  $A$  は  
圧密圧力に依らずに決まる



# 正規圧密状態からのせん断—非排水せん断 (4)



- ▶— : 非排水せん断の有効応力経路
- - -▶- - - : 排水せん断 (側圧一定) の有効応力経路

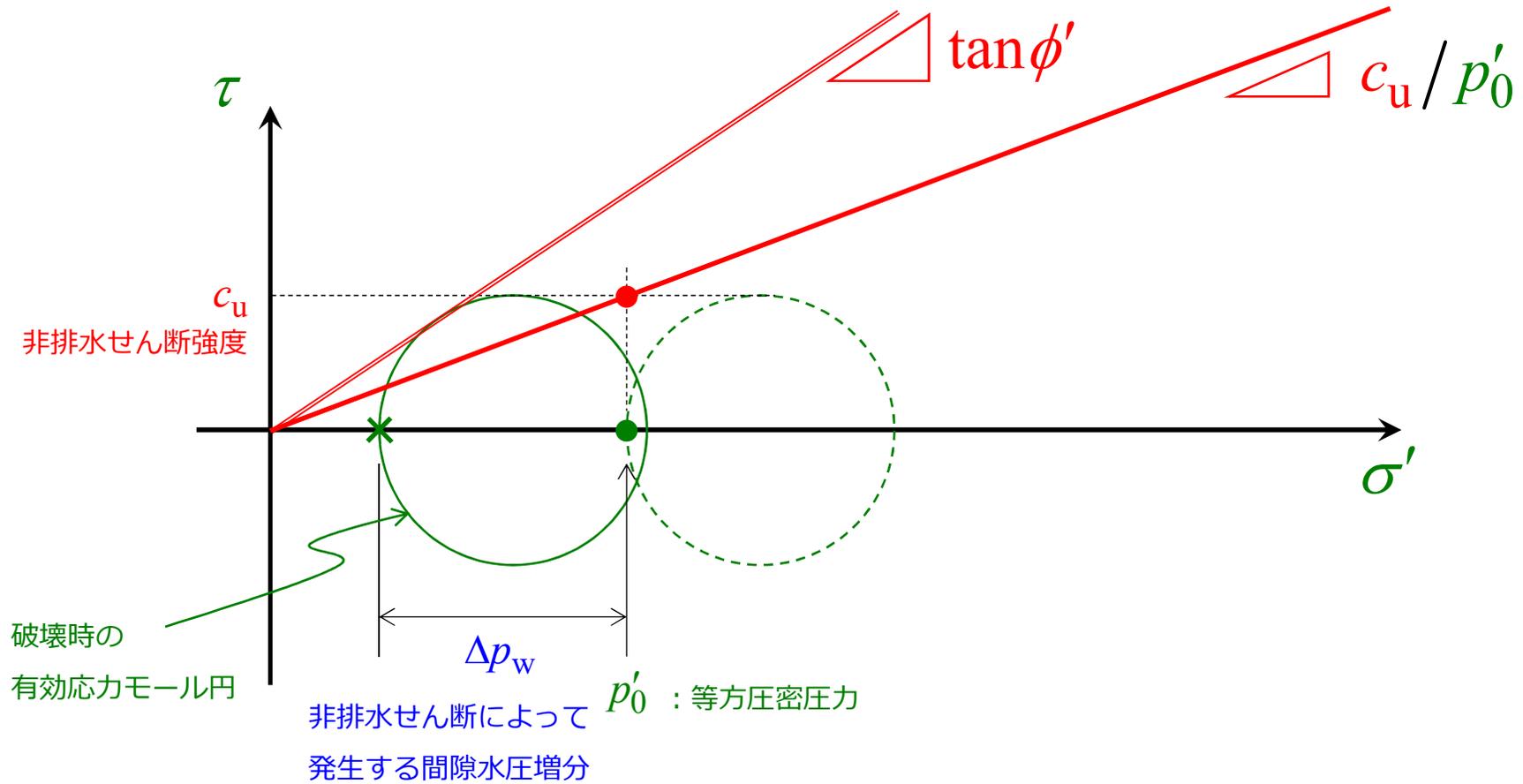
- 有効応力経路が相似形 = 非排水せん断による最大軸差応力  $q_f$  が圧密過程で荷した等方圧密圧力  $p'_0$  に比例する

$$q_f \propto p'_0$$

- 最大軸差応力  $q_f$  は非排水せん断強度  $c_u$  の2倍。つまり, 非排水せん断強度  $c_u$  も等方圧密圧力  $p'_0$  に比例する

$$c_u \propto p'_0$$

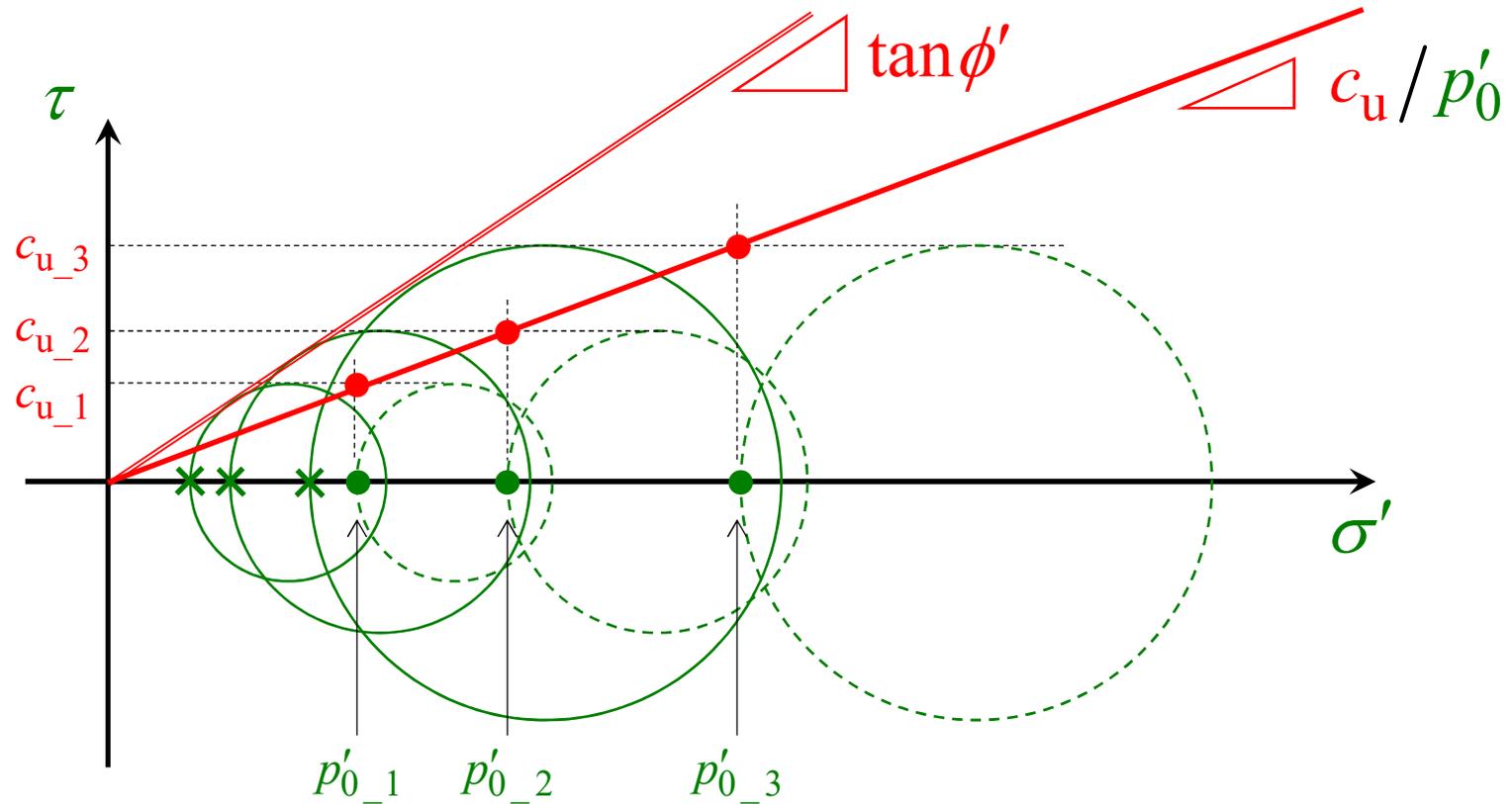
# 正規圧密状態からのせん断—非排水せん断 (5)



$c_u \propto p'_0$  ということは,  $c_u / p'_0$  が一定になる。

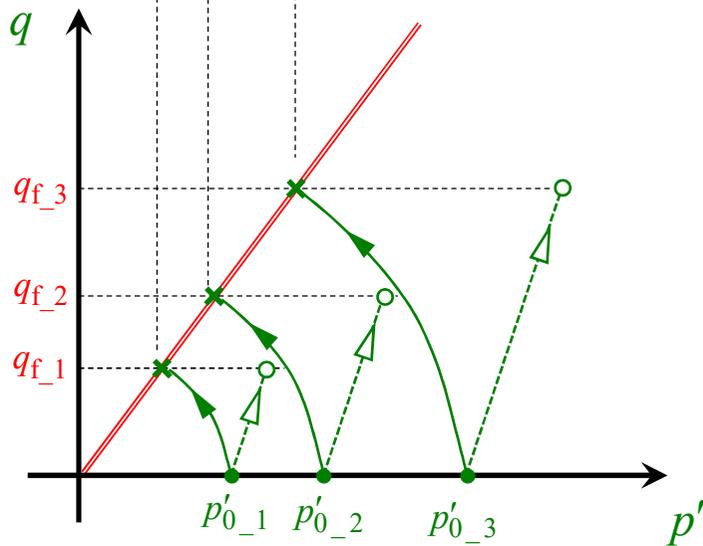
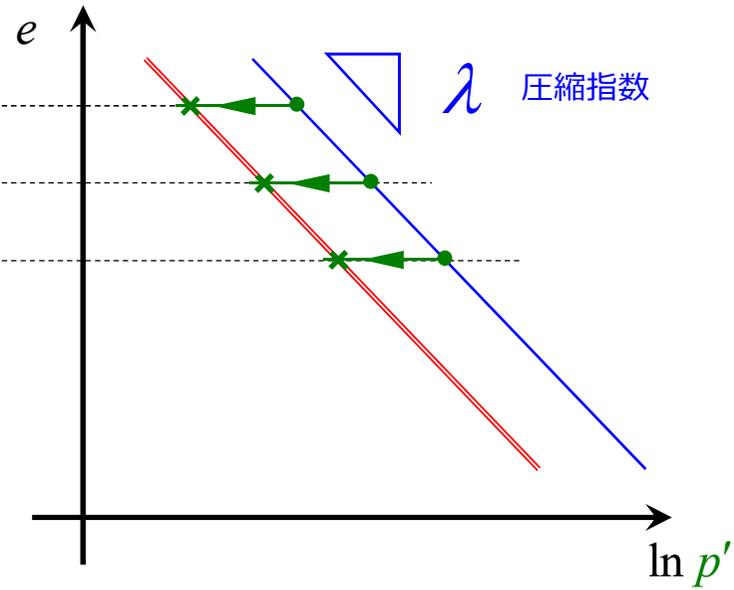
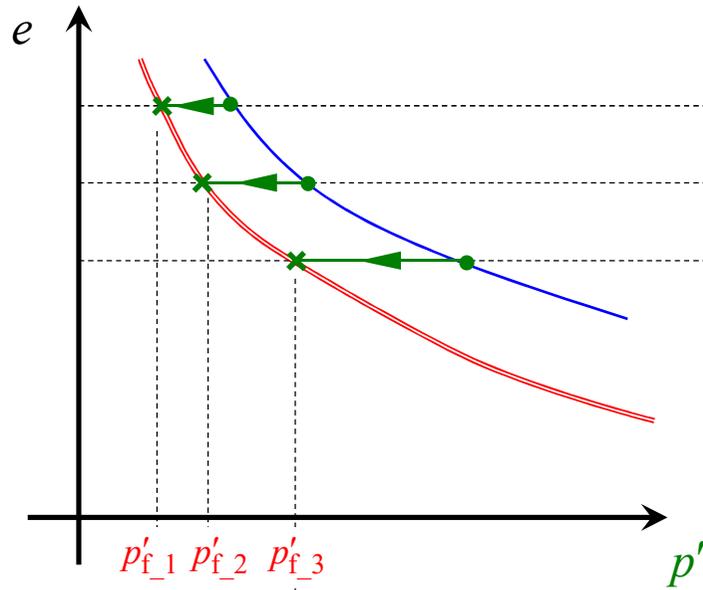
非排水せん断強度増加率

## 正規圧密状態からのせん断—非排水せん断 (5)



実際、正規圧密された複数の等方圧密圧力  $p'_0$  に対して、非排水せん断強度  $c_u$  を得ると非排水せん断強度増加率  $c_u / p'_0$  を傾きとする直線が唯一に定まる。

# 正規圧密状態からのせん断—非排水せん断 (6)



・正規圧密された土：有効応力経路が相似形

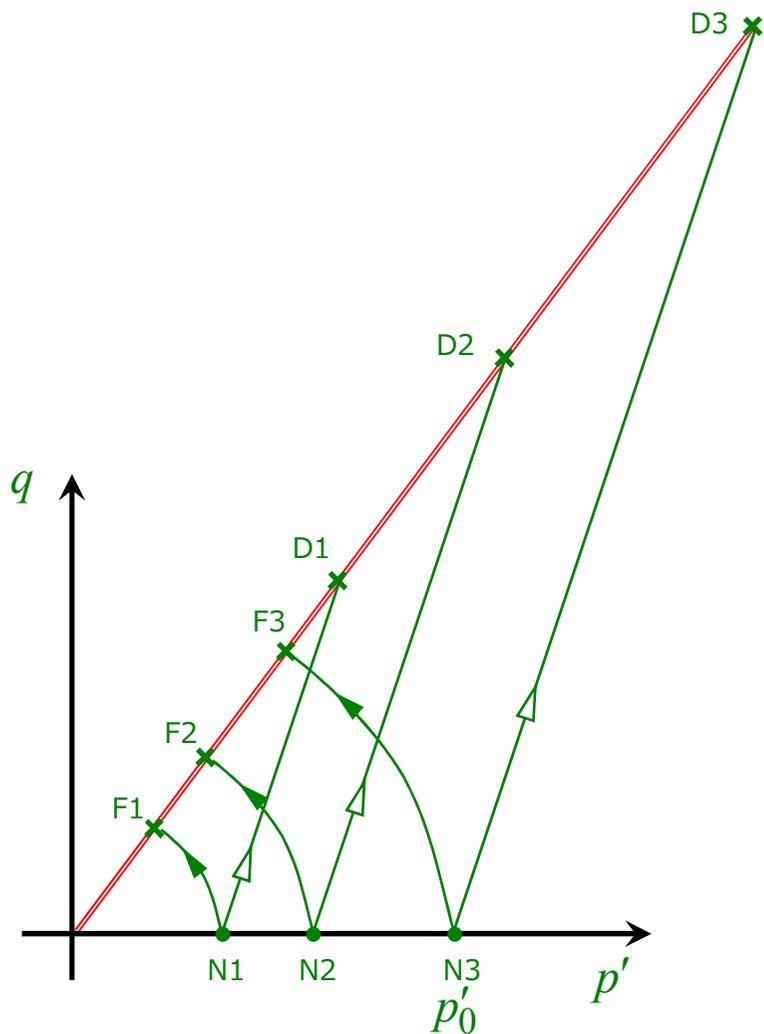
$$q_f \propto p'_0 \propto p'_f$$

$$\Rightarrow p'_f / p'_0 \text{ が一定}$$

$$\Rightarrow \ln(p'_f / p'_0) \text{ が一定}$$

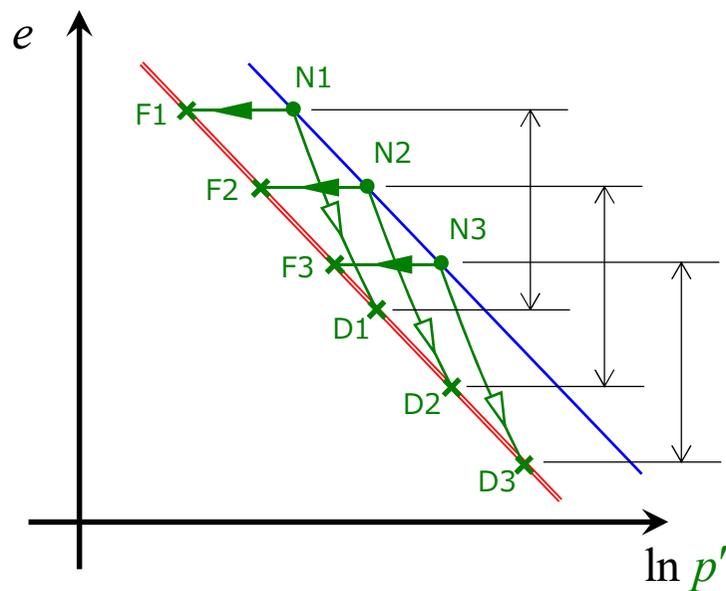
⇒ 正規圧密線と限界状態線が  $e-\ln p'$  平面上で互いに平行

# 正規圧密状態からのせん断—排水せん断



- ▶— : 非排水せん断の有効応力経路
- ▷— : 排水せん断（側圧一定）の有効応力経路

- 限界状態線は唯一定まる  
 ⇒排水せん断による**最大軸差応力**  $q_f$  「も」  
 圧密過程で载荷した**等方圧密圧力**  $p'_0$  に比例
- 正規圧密線と限界状態線が $e-\ln p'$ 平面上で平行  
 ⇒間隙比の減少（負のダイレイタンス）は、  
 圧密圧力が異なっても同等に生じる



## 三軸せん断応答の全体像 ①正規圧密状態からのせん断

材料に対して、限界状態線はユニークに定まる

正規圧密状態からの「非排水」せん断応答のポイント

- ・ 負のダイレイタンシーに起因して、間隙水圧は増加
  - ・ 圧密圧力が異なっても、間隙水圧係数の増加はユニークである
- ⇒ 有効応力経路が相似な経路になる
- ⇒ 非排水せん断強度  $c_u$  が圧密圧力  $p'_0$  に比例する  
：非排水せん断強度増加率  $c_u/p'_0$  が一定
- ⇒ 破壊時の平均有効応力  $p'_f$  が圧密圧力  $p'_0$  に比例する  
： $e-\ln p'$ 平面上で、正規圧密線と限界状態線が互いに平行になる

正規圧密状態からの「排水」せん断応答のポイント

- ・ 側圧一定であれば、 $p'-q$ 平面上での応力経路の勾配は3
- ⇒ 破壊時の平均有効応力  $p'_f$  はやはり、圧密圧力  $p'_0$  に比例する
- ⇒ 生じる間隙比の減少量（負のダイレイタンシー）は、圧密圧力に依らない

## 例題7-1

正規圧密された土の非排水せん断強度増加率  $c_u/p'_0$  を破壊時の過剰間隙水圧係数  $A_f$  と有効内部摩擦角  $\phi'$  を用いて表しなさい。強度定数の有効粘着力  $c'$  はゼロとする。必要であれば次の関係を用いて、誘導すること。

$$\text{非排水せん断によって生じる間隙水圧：} \quad \Delta p_w = \Delta \sigma_r + A_f (\Delta \sigma_a - \Delta \sigma_r)$$

$$\text{破壊時の有効応力と有効内部摩擦角の関係：} \quad \sin \phi' = \frac{\sigma'_{af} - \sigma'_{rf}}{\sigma'_{af} + \sigma'_{rf}}$$

ただし、 $\Delta \sigma_a$  と  $\Delta \sigma_r$  はせん断初期から破壊に至るまでの軸圧と側圧の増分である。

ヒント：非排水せん断強度  $c_u$  は、 $c_u = \frac{q_f}{2} = \frac{\sigma'_{af} - \sigma'_{rf}}{2}$  。ここから展開する。

# 例題7-1

	全応力		間隙水圧	有効応力	
	$\sigma_a$	$\sigma_r$	$p_w$	$\sigma'_a$	$\sigma'_r$
①圧密後	$p'_0$	$p'_0$	0	$p'_0$	$p'_0$
増分	$\Delta\sigma_a$	$\Delta\sigma_r$	$\Delta p_w$	$\Delta\sigma_a - \Delta p_w$	$\Delta\sigma_r - \Delta p_w$
②破壊時	$p'_0 + \Delta\sigma_a$	$p'_0 + \Delta\sigma_r$	$\Delta p_w$	$\sigma'_{af}$	$\sigma'_{rf}$

※圧密後の背圧をゼロとする

$$\sigma'_{af} = p'_0 + (\Delta\sigma_a - \Delta p_w)$$

$$\sigma'_{rf} = p'_0 + (\Delta\sigma_r - \Delta p_w)$$

$$\Rightarrow \sigma'_{af} - \sigma'_{rf} = \Delta\sigma_a - \Delta\sigma_r$$

非排水せん断強度は  $c_u = \frac{q_f}{2} = \frac{\sigma'_{af} - \sigma'_{rf}}{2}$

破壊時の有効応力は,

$$\sigma'_{af} = p'_0 + \Delta\sigma_a - \Delta p_w$$

$$\sigma'_{rf} = p'_0 + \Delta\sigma_r - \Delta p_w$$

Skemptonの間隙水圧式を代入すると,

$$\sigma'_{af} = p'_0 + \Delta\sigma_a - \Delta\sigma_r - A_f(\Delta\sigma_a - \Delta\sigma_r) = p'_0 + (1 - A_f)(\Delta\sigma_a - \Delta\sigma_r)$$

$$\sigma'_{rf} = p'_0 + \Delta\sigma_r - \Delta\sigma_r - A_f(\Delta\sigma_a - \Delta\sigma_r) = p'_0 - A_f(\Delta\sigma_a - \Delta\sigma_r)$$

2つの式を足し合わせて,

$$\sigma'_{af} + \sigma'_{rf} = 2p'_0 + (1 - 2A_f)(\Delta\sigma_a - \Delta\sigma_r)$$

$$\Rightarrow \sigma'_{af} - \sigma'_{rf} = 2p'_0 + (1 - 2A_f)(\sigma'_{af} - \sigma'_{rf})$$

続く

# 例題7-1

	全応力		間隙水圧	有効応力	
	$\sigma_a$	$\sigma_r$	$p_w$	$\sigma'_a$	$\sigma'_r$
①圧密後	$p'_0$	$p'_0$	0	$p'_0$	$p'_0$
増分	$\Delta\sigma_a$	$\Delta\sigma_r$	$\Delta p_w$	$\Delta\sigma_a - \Delta p_w$	$\Delta\sigma_r - \Delta p_w$
②破壊時	$p'_0 + \Delta\sigma_a$	$p'_0 + \Delta\sigma_r$	$\Delta p_w$	$\sigma'_{af}$	$\sigma'_{rf}$

※圧密後の背圧をゼロとする

$$\sigma'_{af} = p'_0 + (\Delta\sigma_a - \Delta p_w)$$

$$\sigma'_{rf} = p'_0 + (\Delta\sigma_r - \Delta p_w)$$

$$\Rightarrow \sigma'_{af} - \sigma'_{rf} = \Delta\sigma_a - \Delta\sigma_r$$

前頁で得られた式：

$$\sigma'_{af} + \sigma'_{rf} = 2p'_0 + (1 - 2A_f)(\sigma'_{af} - \sigma'_{rf})$$

ここで、与えられた有効内部摩擦角の式： $\sin \phi' = \frac{\sigma'_{af} - \sigma'_{rf}}{\sigma'_{af} + \sigma'_{rf}}$  を考慮する。すなわち

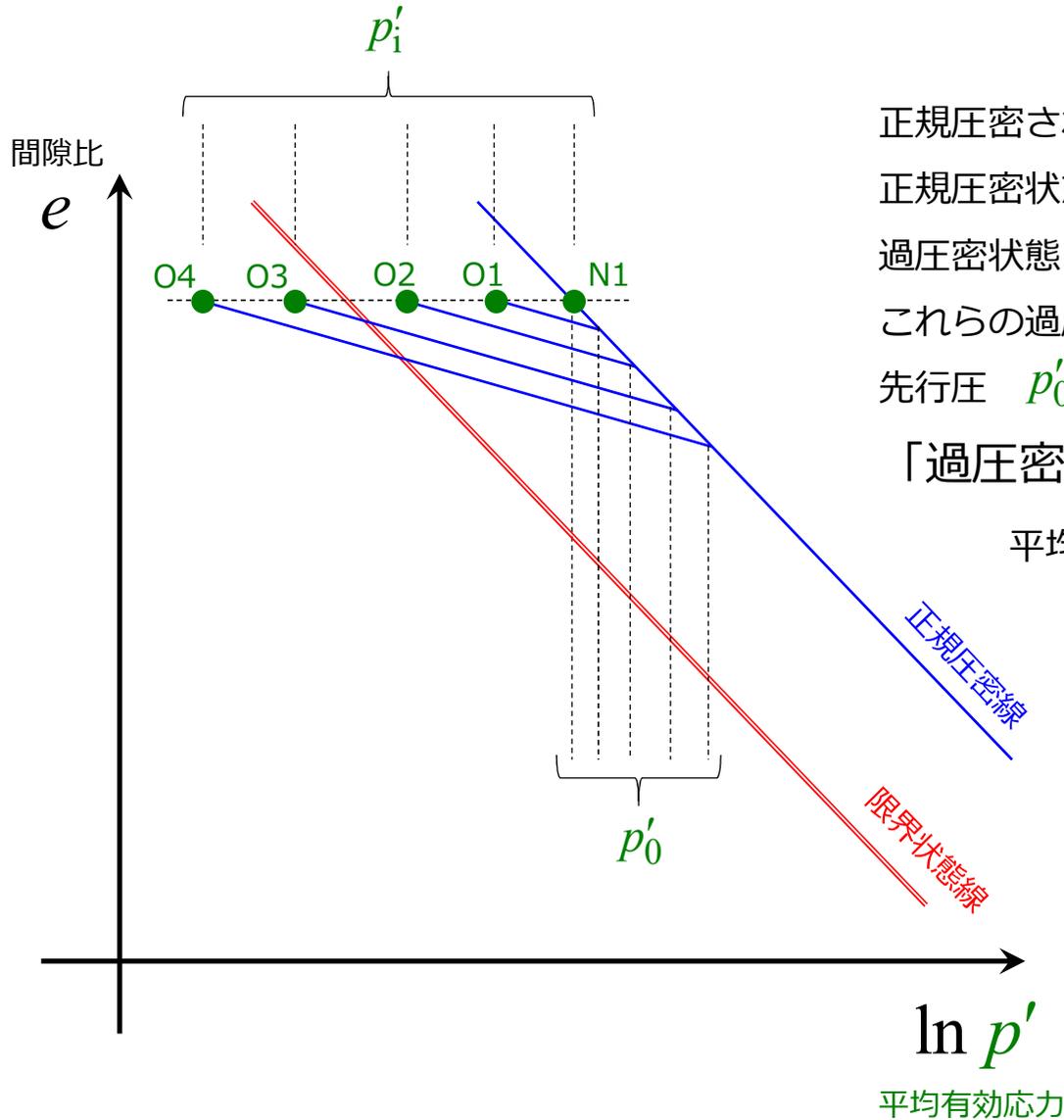
$$\frac{\sigma'_{af} - \sigma'_{rf}}{\sin \phi'} = 2p'_0 + (1 - 2A_f)(\sigma'_{af} - \sigma'_{rf})$$

$$\Rightarrow \sigma'_{af} - \sigma'_{rf} = \frac{2p'_0 \sin \phi'}{1 + (2A_f - 1) \sin \phi'}$$

これより

$$\frac{c_u}{p'_0} = \frac{\sigma'_{af} - \sigma'_{rf}}{2p'_0} = \frac{\sin \phi'}{1 + (2A_f - 1) \sin \phi'}$$

# 過圧密状態からのせん断—せん断前（圧密⇒除荷後）



正規圧密された後，除荷された状態が「過圧密状態」

正規圧密状態：N1と同じ間隙比である

過圧密状態：O1, O2, O3, O4からのせん断を考える

これらの過圧密状態は，

先行圧  $p'_0$ （過去に受けた最大の圧密圧力）が異なる

「過圧密比OCR」は，除荷後（せん断前）の

平均有効応力  $p'_i$  に対する先行圧  $p'_0$  の比

$$OCR = \frac{p'_0}{p'_i}$$

OCRの大小関係は

$$N1 < O1 < O2 < O3 < O4$$

正規圧密

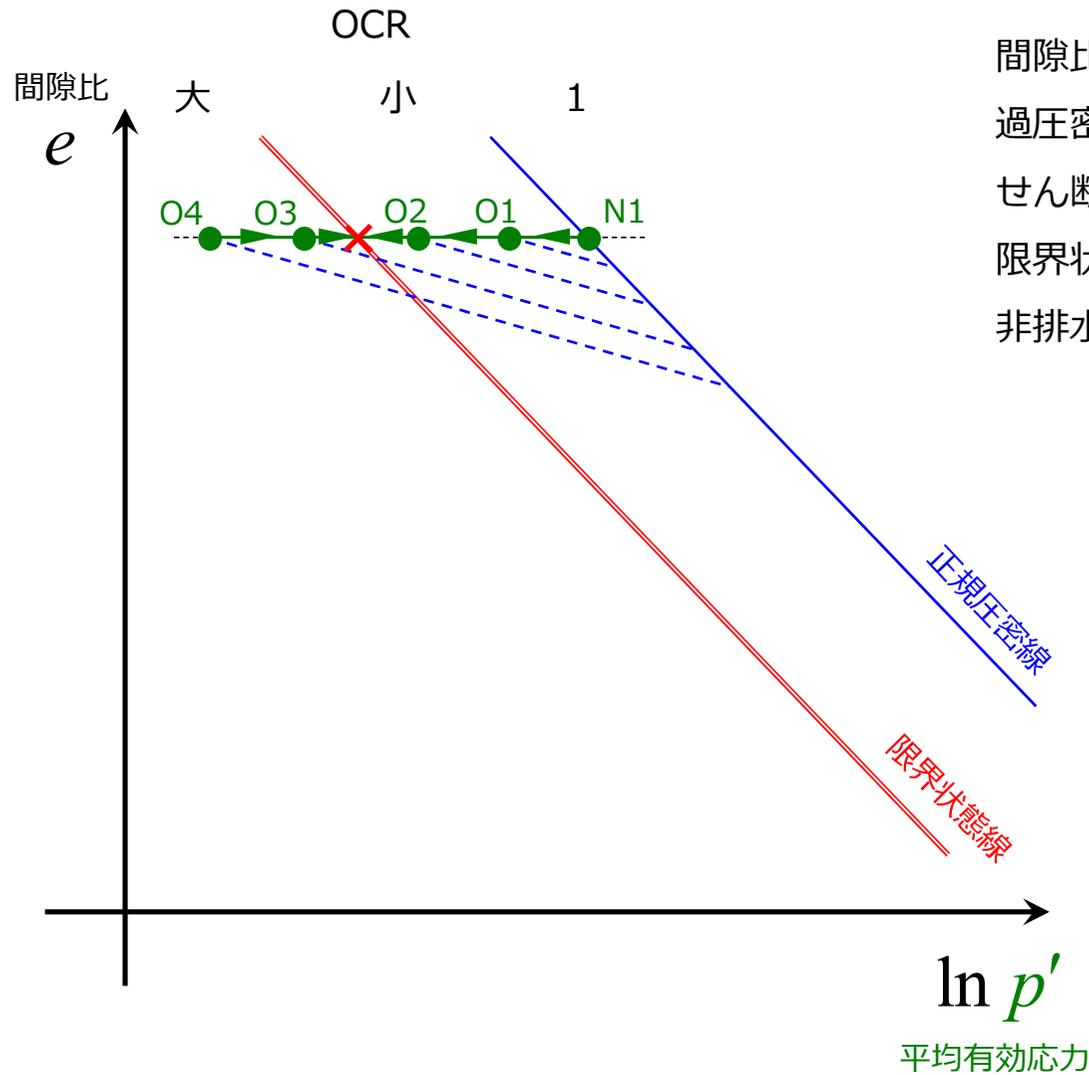
過圧密

OCR=1

OCR：小

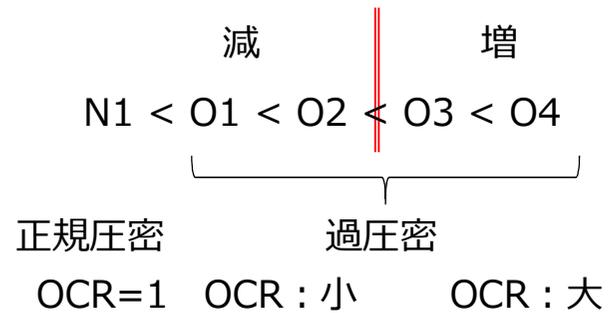
OCR：大

# 過圧密状態からのせん断—非排水せん断 (1)

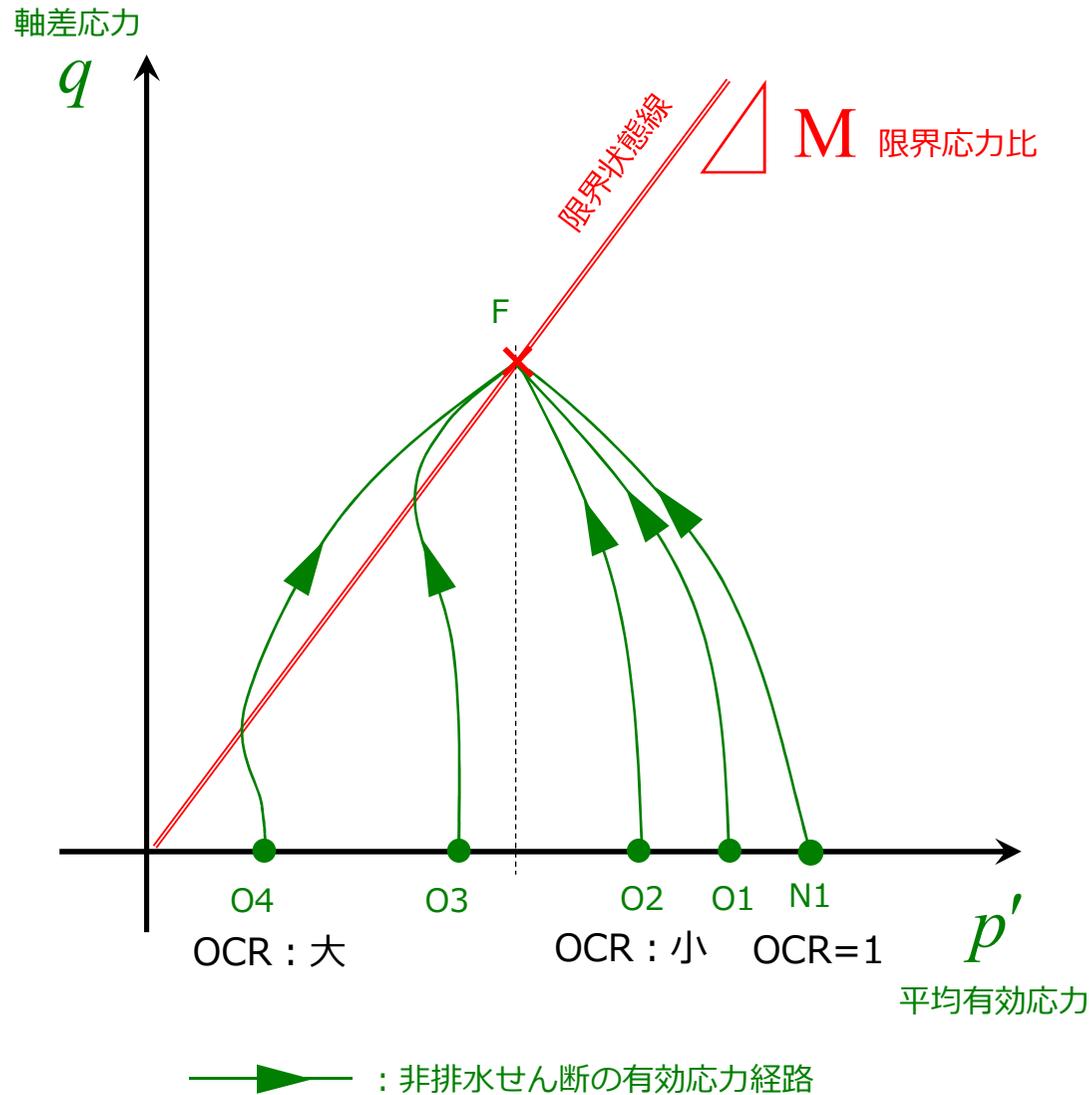


間隙比が同じであれば、同じ限界状態に至る  
過圧密状態からの場合、  
せん断前の平均有効応力  $p'_i$  が左図で  
限界状態線よりも右にあるか左にあるかで  
非排水せん断中の平均有効応力の増減が決まる

平均有効応力の増減



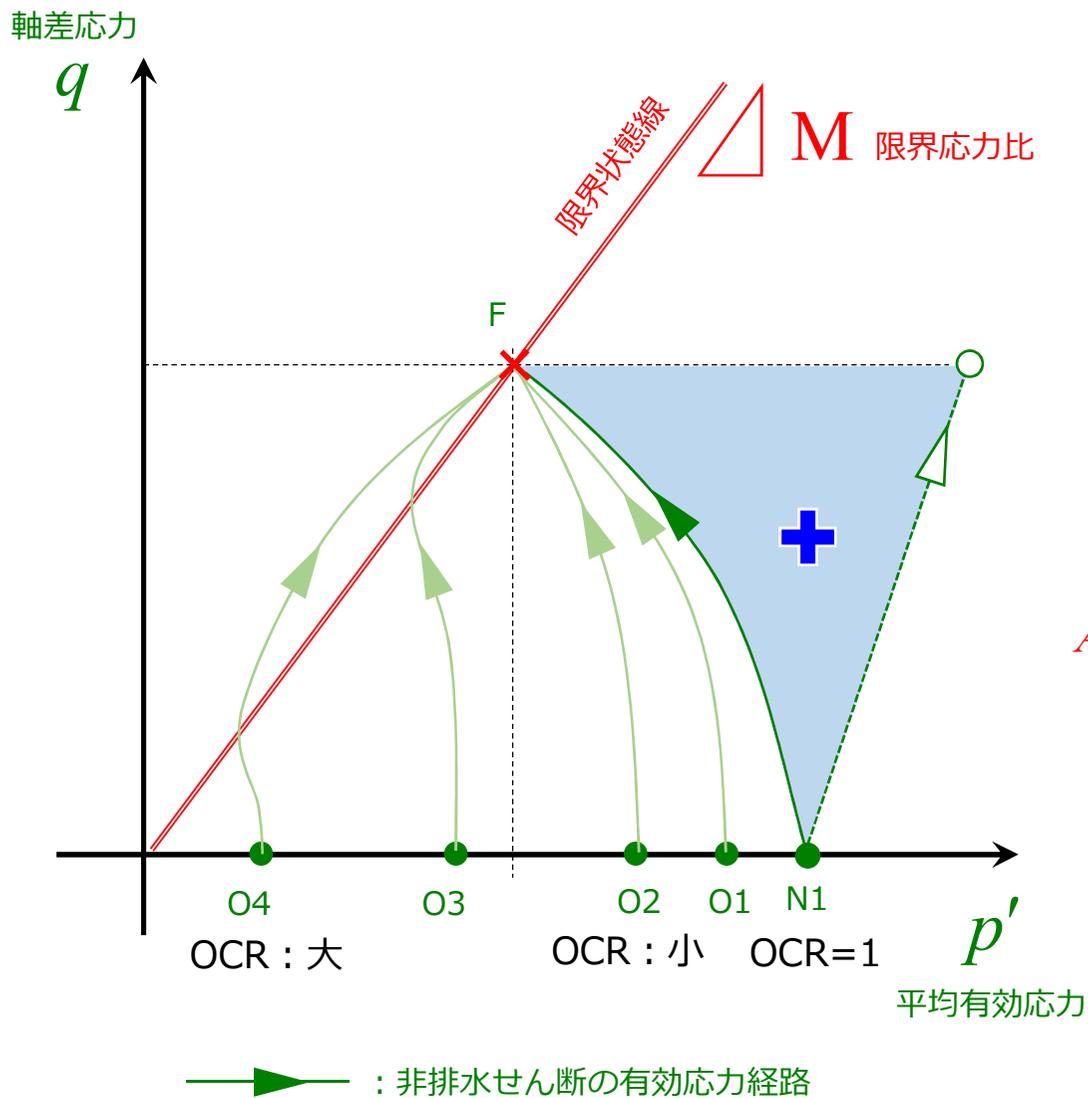
## 過圧密状態からのせん断—非排水せん断 (2)



- 間隙比が同じ⇒非排水せん断強度が同じ
- OCRは異なる⇒有効応力経路が異なる
- 正規圧密あるいは軽い過圧密状態から  
: 平均有効応力が減 (N1, O1, O2)
- 重い過圧密状態から  
: 平均有効応力が増 (O3, O4)  
ただし, 少し減ってから増える

これらの経路に対する間隙水圧の発生は？

# 過圧密状態からのせん断—非排水せん断 (3)



側圧一定での間隙水圧変化  $\Delta p_w$

増

$N1 < O1 < O2 < O3 < O4$

正規圧密

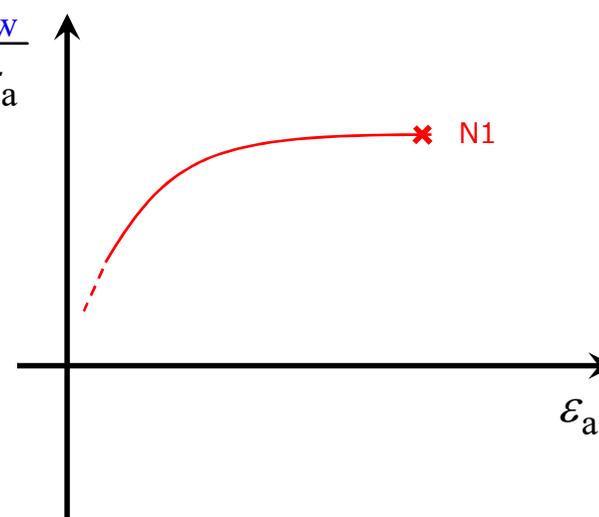
過圧密

OCR=1

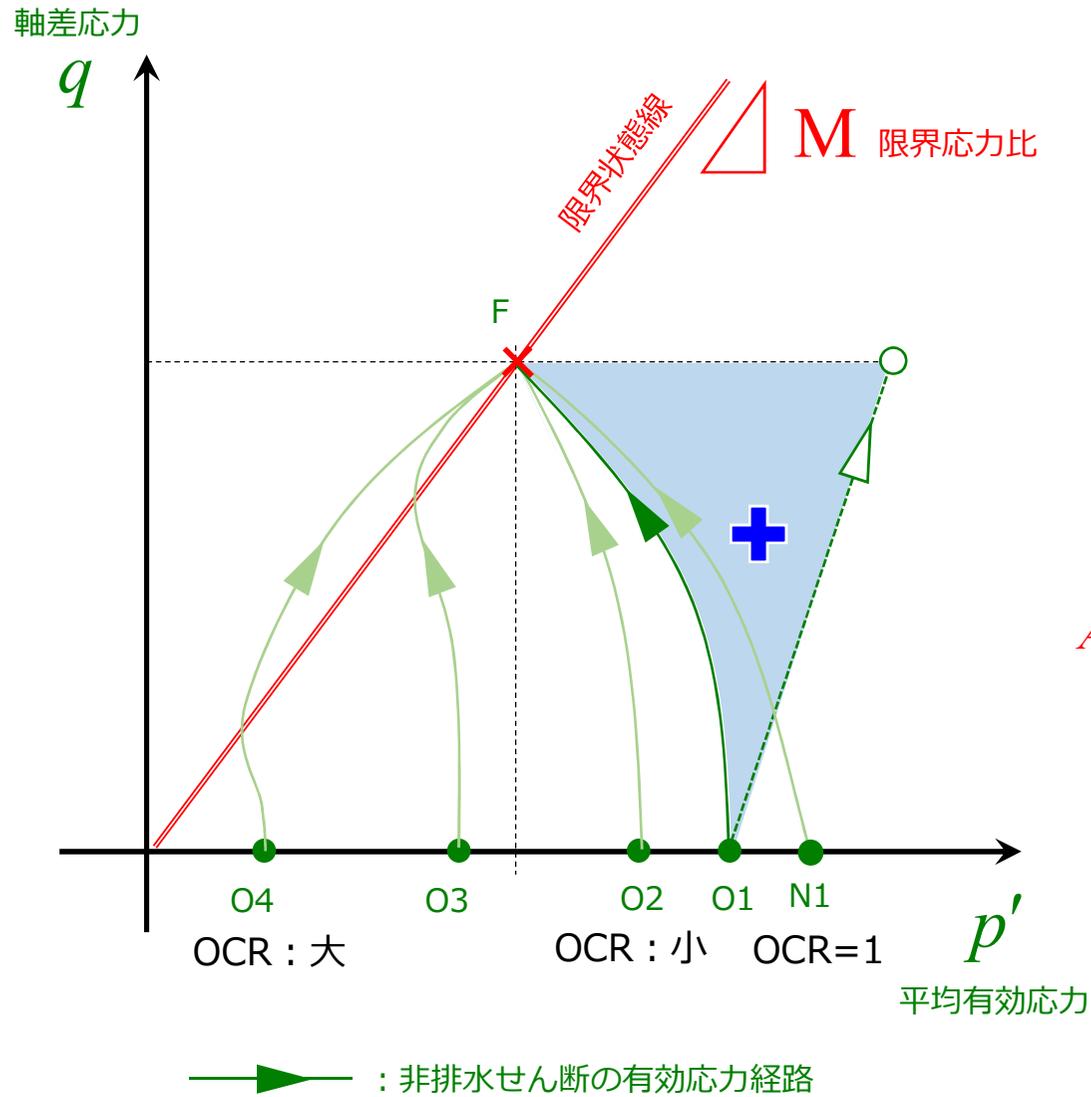
OCR : 小

OCR : 大

$$A = \frac{\Delta p_w}{\Delta \sigma_a}$$



# 過圧密状態からのせん断—非排水せん断 (4)



側圧一定での間隙水圧変化  $\Delta p_w$

増 > 増

N1 < O1 < O2 < O3 < O4

正規圧密

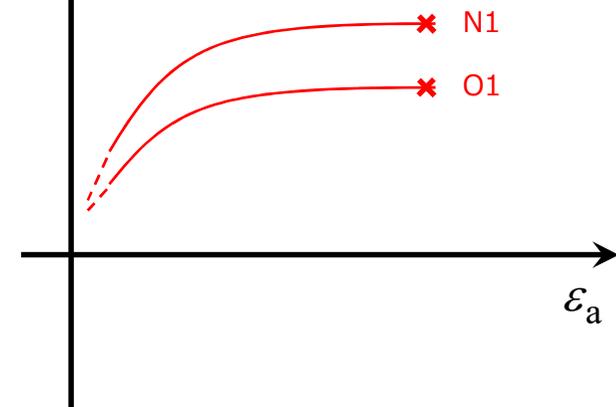
過圧密

OCR=1

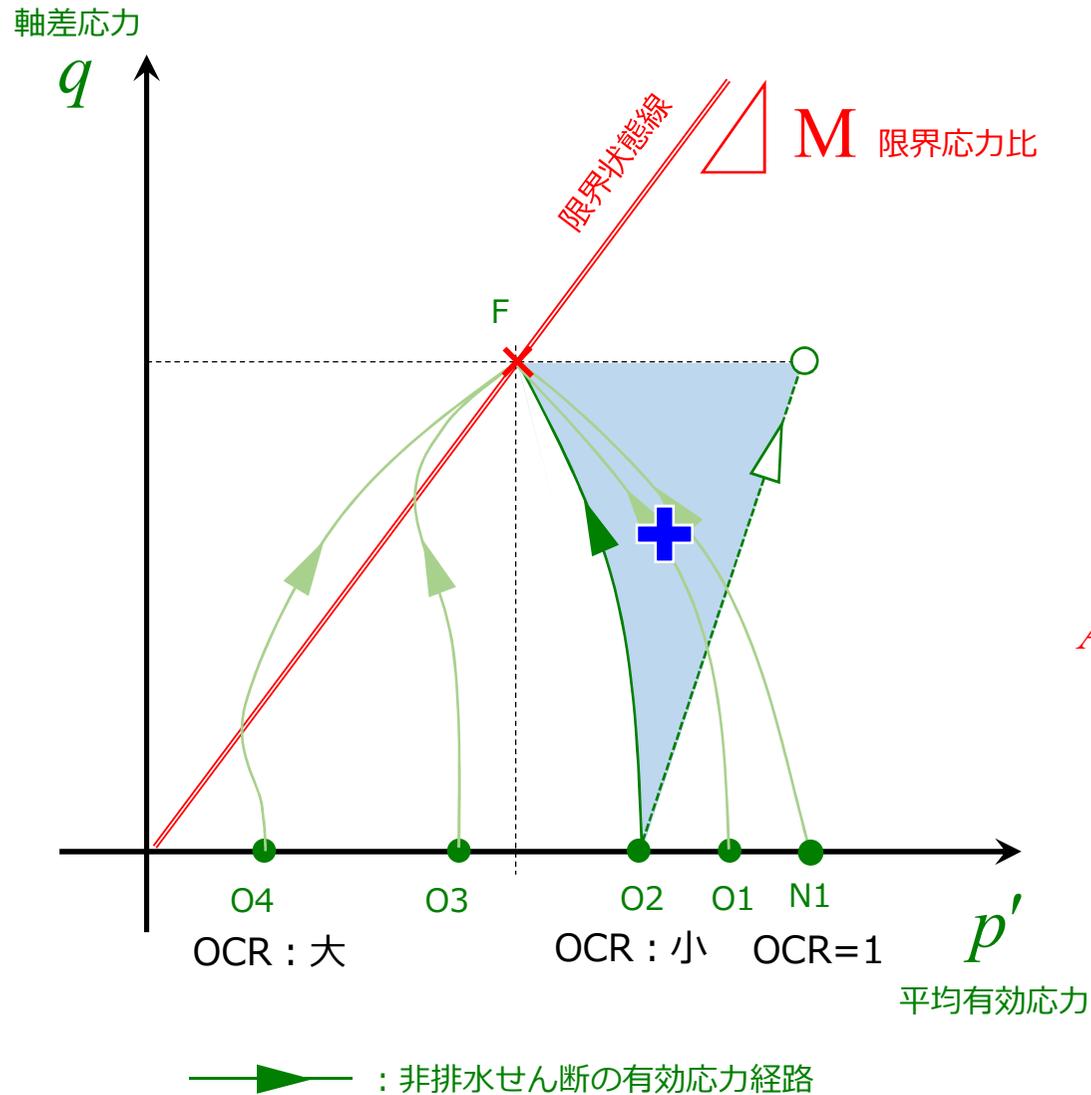
OCR : 小

OCR : 大

$$A = \frac{\Delta p_w}{\Delta \sigma_a}$$



# 過圧密状態からのせん断—非排水せん断 (5)



側圧一定での間隙水圧変化  $\Delta p_w$

増 > 増 > 増

N1 < O1 < O2 < O3 < O4

正規圧密

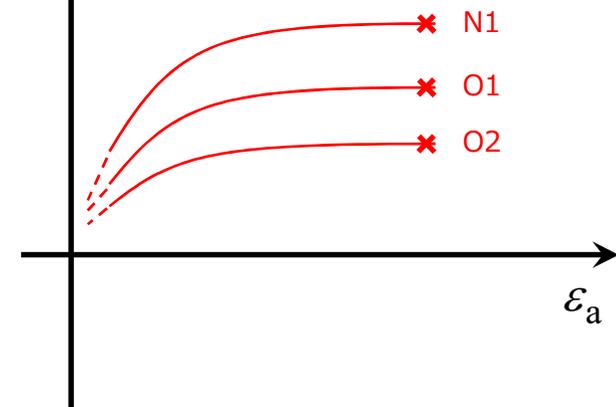
過圧密

OCR=1

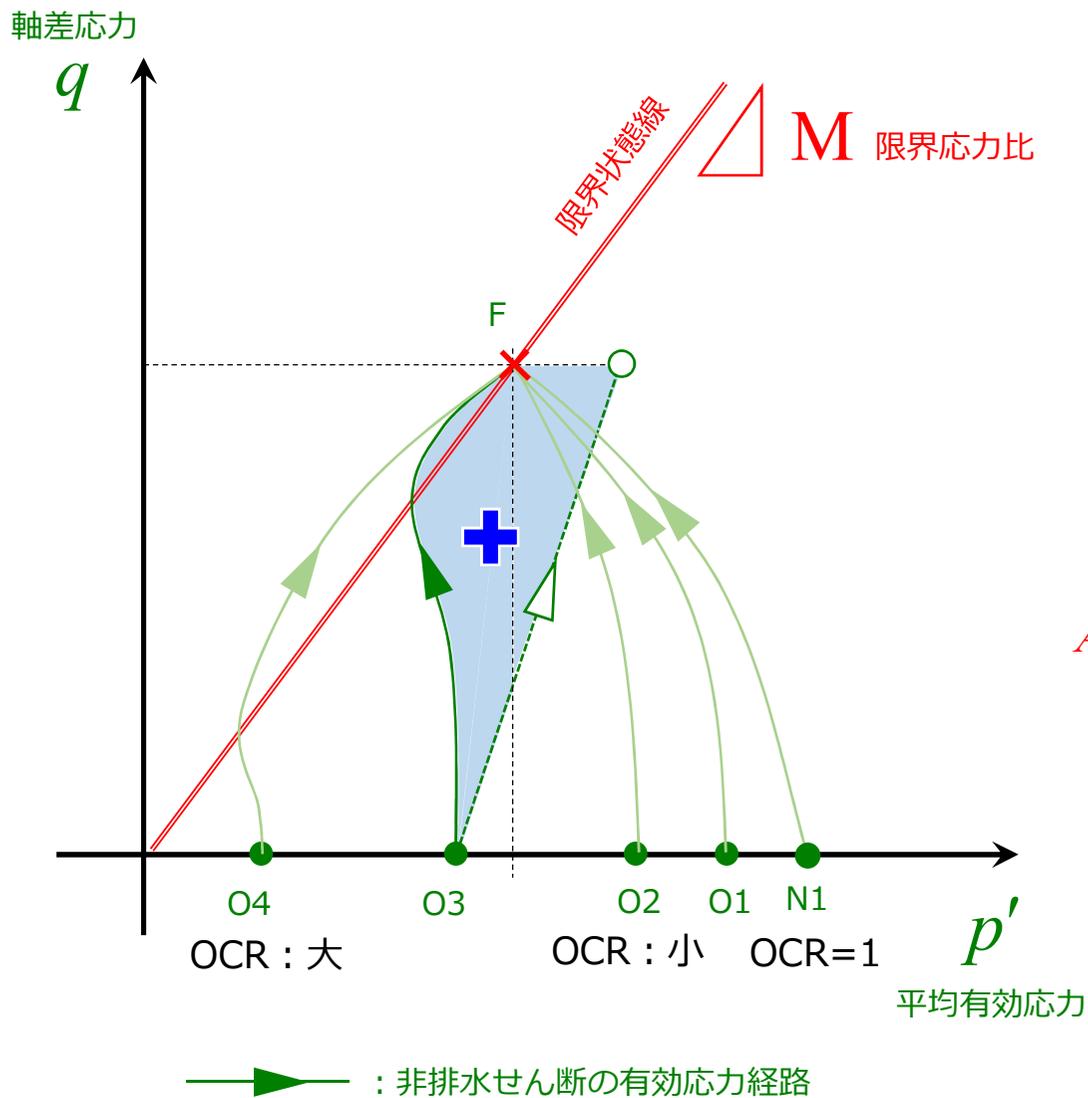
OCR:小

OCR:大

$$A = \frac{\Delta p_w}{\Delta \sigma_a}$$



# 過圧密状態からのせん断—非排水せん断 (6)



側圧一定での間隙水圧変化  $\Delta p_w$

増 > 増 > 増 > 増 ⇒ 減

N1 < O1 < O2 < O3 < O4

正規圧密

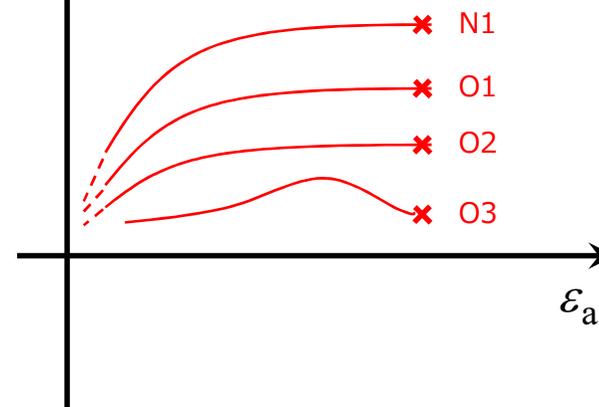
過圧密

OCR=1

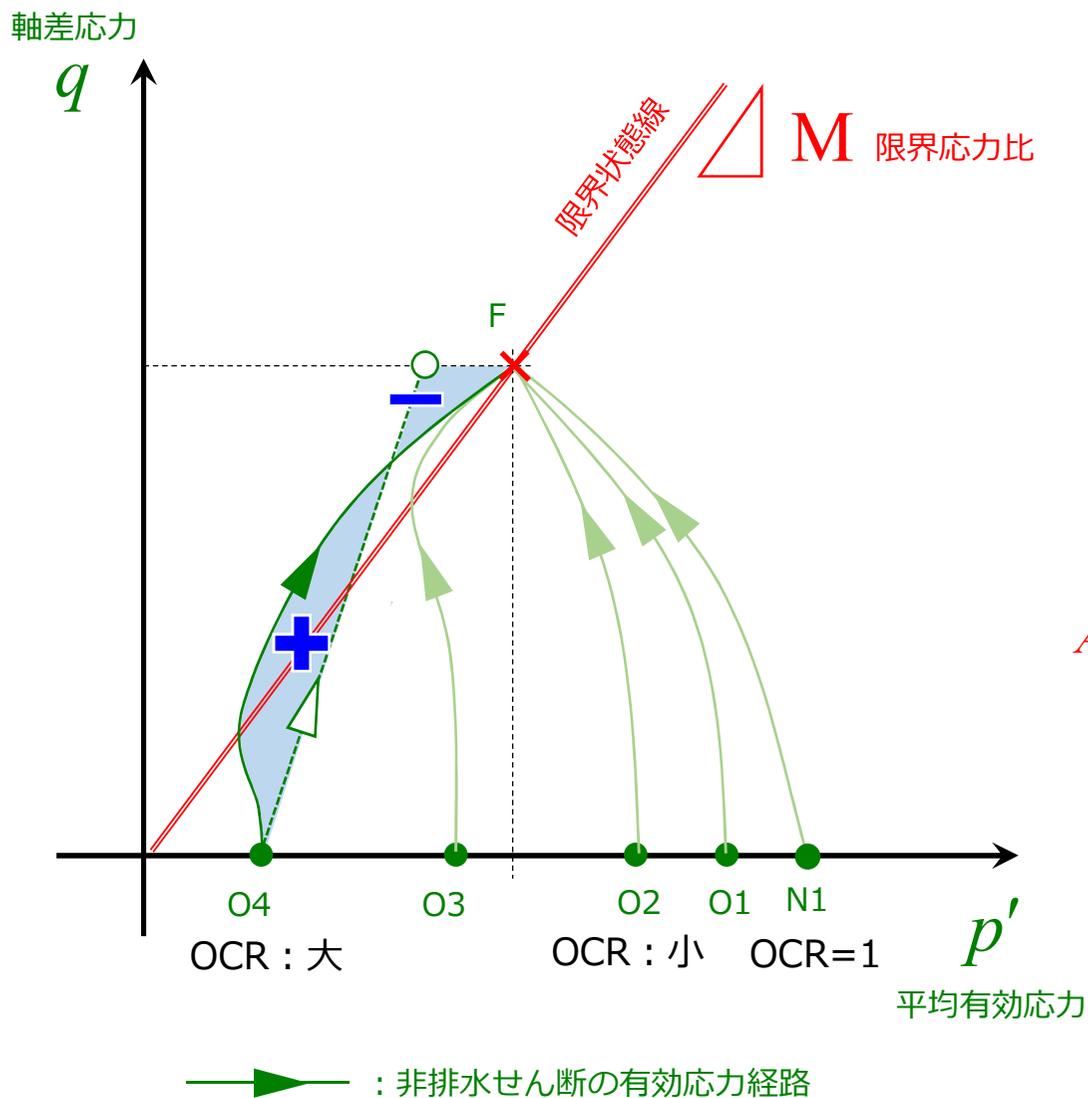
OCR : 小

OCR : 大

$$A = \frac{\Delta p_w}{\Delta \sigma_a}$$



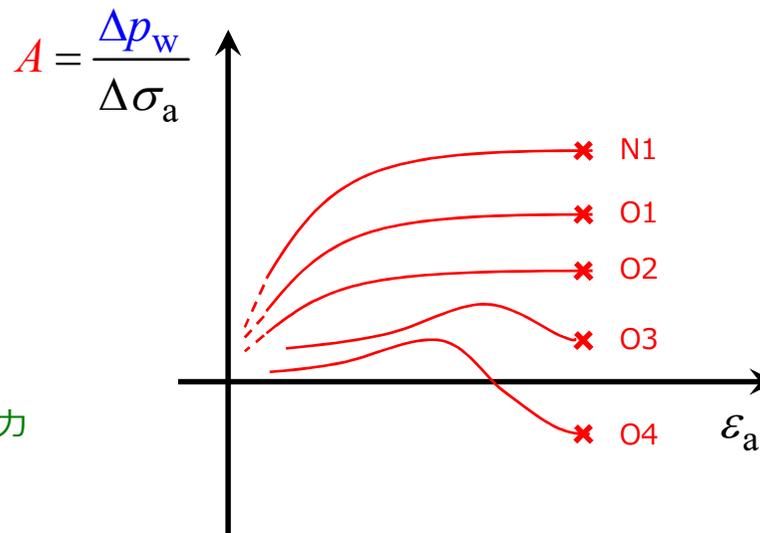
# 過圧密状態からのせん断—非排水せん断 (7)



側圧一定での間隙水圧変化  $\Delta p_w$

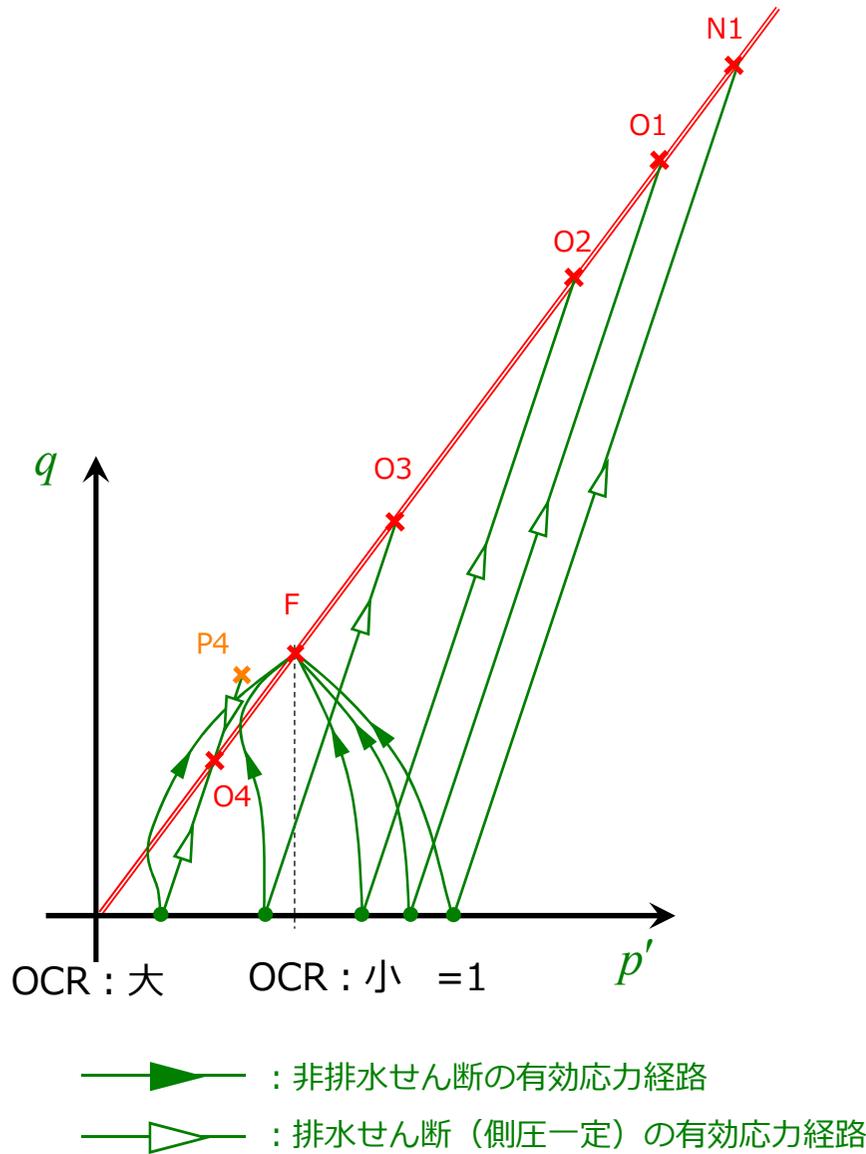
増 > 増 > 増 > 増 微増  
 $\Rightarrow$  減  $\Rightarrow$  減  
 $N1 < O1 < O2 < O3 < O4$

正規圧密  $OCR=1$   $OCR:小$   $OCR:大$



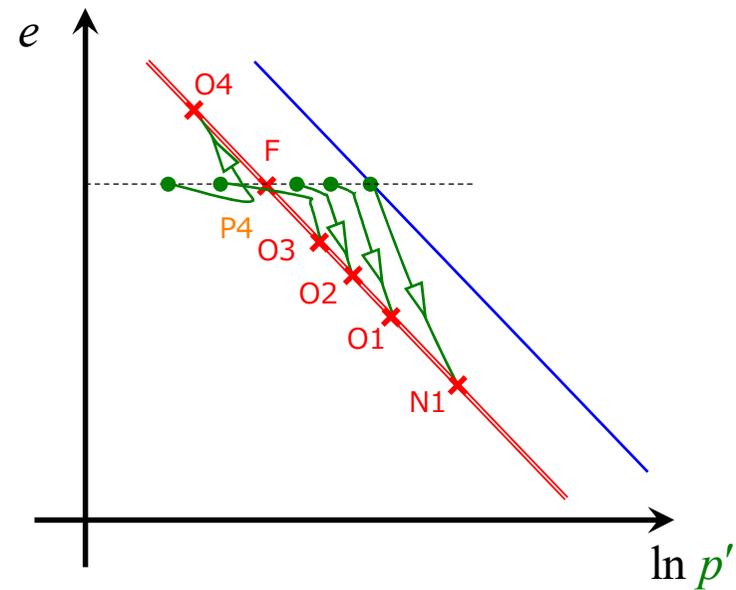
OCRが大きい場合、間隙水圧係数が負に

# 過圧密状態からのせん断—排水せん断



側圧一定での間隙比変化

収縮                      膨張  
 $N1 < O1 < O2 < O3 < O4$   
 正規圧密                      過圧密  
 OCR=1      OCR : 小      OCR : 大



## 三軸せん断応答の全体像 ②過圧密状態からのせん断

材料に対して、限界状態線はユニークに定まる

過圧密状態からの「非排水」せん断応答のポイント

- ・ 間隙比が同じであれば、過圧密比に依らず、非排水せん断強度は同じ
- ・ OCRが大きくなるにつれ
  - 負のダイレイタンシーから正のダイレイタンシーに移行
  - 発生する間隙水圧増分が減っていく。OCRが特大だと、負になる場合も
  - 間隙水圧係数も減り、OCRが特大だと、これも負になる
  - OCRが特大だと、限界状態線を超える有効応力経路をとる

過圧密状態からの「排水」せん断応答のポイント

- ・ 同じ間隙比から排水せん断を考えると
  - 正規圧密状態からのせん断が最も体積収縮（間隙比の減少量）が大きい
  - OCRが大きくなるにつれ
    - 体積収縮（間隙比の減少量）が小さくなっていく
    - OCRが特大だと、体積膨張（間隙比の増加）に転じる